

数字信号处理教案

(新疆大学信息学院数字信号处理课程组)

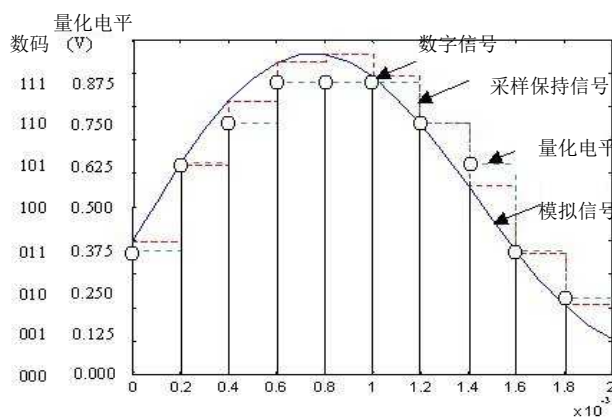
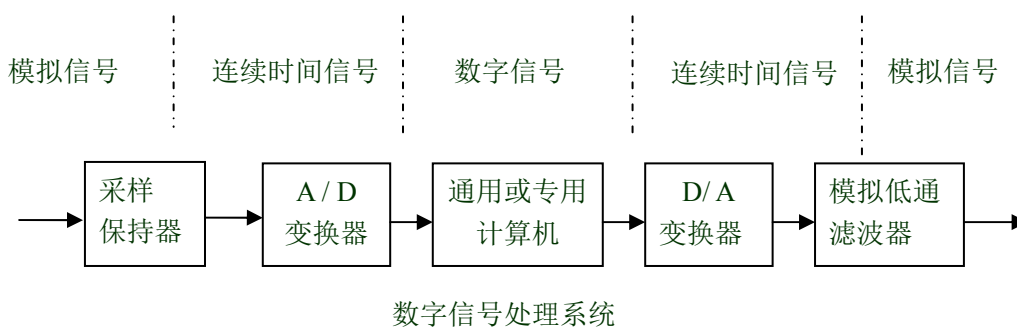
2014年9月

绪论 第一节

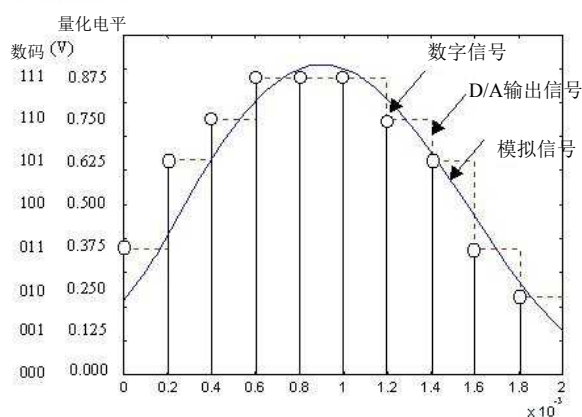
绪论

一、从模拟到数字

- 1、信号：信号传递信息的函数也是独立变量的函数，这个变量可以是时间、空间位置等。
- 2、连续信号：在某个时间区间，除有限间断点外所有瞬时均有确定值。
- 3、模拟信号是连续信号的特例。时间和幅度均连续。
- 4、离散信号：时间上不连续，幅度连续。
- 5、数字信号：幅度量化，时间和幅度均不连续。

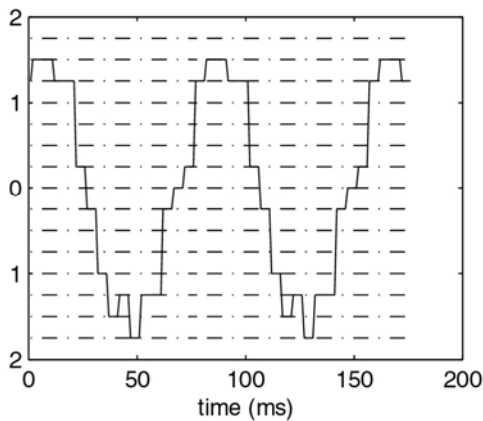


模拟信号的数字化

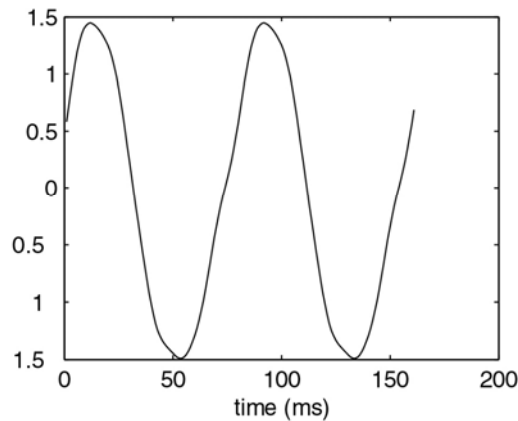


数字信号转化成模拟信号

D/A输出



模拟滤波输出



二、数字信号处理的主要优点

数字信号处理采用数字系统完成信号处理的任任务，它具有数字系统的一些共同优点，例如抗干扰、可靠性强，便于大规模集成等。除此而外，与传统的模拟信号处理方法相比较，它还具有以下一些明显的优点：

1、精度高

在模拟系统的电路中，元器件精度要达到 10^{-3} 以上已经不容易了，而数字系统 17 位字长可以达到 10^{-5} 的精度，这是很平常的。例如，基于离散傅里叶变换的数字式频谱分析仪，其幅值精度和频率分辨率均远远高于模拟频谱分析仪。

2、灵活性强

数字信号处理采用了专用或通用的数字系统，其性能取决于运算程序和乘法器的各系数，这些均存储在数字系统中，只要改变运算程序或系数，即可改变系统的特性参数，比改变模拟系统方便得多。

3、可以实现模拟系统很难达到的指标或特性

例如：有限长单位脉冲响应数字滤波器可以实现严格的线性相位；

在数字信号处理中可以将信号存储起来，用延迟的方法实现非因果系统，从而提高了系统的性能指标；

数据压缩方法可以大大地减少信息传输中的信道容量。

4、可以实现多维信号处理

利用庞大的存储单元，可以存储二维的图像信号或多维的阵列信号，实现二维或多维的滤波及谱分析等。

5、缺点

(1) 增加了系统的复杂性。他需要模拟接口以及比较复杂的数字系统。

(2) 应用的频率范围受到限制。主要是 A/D 转换的采样频率的限制。

(3) 系统的功率消耗比较大。数字信号处理系统中集成了几十万甚至更多的晶体管，而模拟信号处理系统中大量使用的是电阻、电容、电感等无源器件，随着系统的复杂性增加这一矛盾会更加突出。

三、发展特点

(1)由简单的运算走向复杂的运算，目前几十位乘几十位的全并行乘法器可以在数个纳秒的时间内完成一次浮点乘法运算，这无论在运算速度上和运算精度上均为复杂的数字信号处理算法提供了先决条件；

(2)由低频走向高频，模数转换器的采样频率已高达数百兆赫，可以将视频甚至更高频率的信号数字化后送入计算机处理；

(3)由一维走向多维，像高分辨率彩色电视、雷达、石油勘探等多维信号处理的应用领域已与数字信号处理结下了不解之缘。

(4) 各种数字信号处理系统均几经更新换代

在图像处理方面，图像数据压缩是多媒体通信、影碟机(VCD 或 DVD)和高清晰度电视(HDTV)的关键技术。国际上先后制定的标准 H.261、JPEG、MPEG—1 和 MPEG—2 中均使用了离散余弦变换(DCT)算法。近年来发展起来的小波(Wavelet)变换也是一种具有高压缩比和快速运算特点的崭新压缩技术，应用前景十分广阔，可望成为新一代压缩技术的标准。

年代	特点	\$/MIPS
60 年代	大学探索	\$100-\$1,000
70 年代	军事运用	\$10-\$100
80 年代	商用成功	\$1-\$10
90 年代	进入消费类电子	\$0.1-\$1

今后 生活用品 \$0.01-\$0.1

四、各种数字信息系统 数字信号处理不断开辟新的应用领域

在机械制造中，基于 FFT 算法的频谱分析仪用于振动分析和机械故障诊断；医学中使用数字信号处理技术对心电(ECG)和脑电(EEG)等生物电信号作分析和处理；数字音频广播(DAB)广泛地使用了数字信号处理技术。可以说，数字信号处理技术已在信息处理领域引起了广泛的关注和高度的重视。

五、数字信号处理系统的实现

- **软件实现**

软件实现是用一台通用的数字计算机运行数字信号处理程序。其优点是经济，一机可以多用；缺点是处理速度慢，这是由于通用数字计算机的体系结构并不是为某一种特定算法而设计的。在许多非实时的应用场合，可以采用软件实现方法。例如，处理一盘混有噪声的录像(音)带，我们可以将图像(声音)信号转换成数字信号并存入计算机，用较长的时间一帧帧地处理这些数据。处理完毕后，再实时地将处理结果还原成一盘清晰的录像(音)带。通用计算机即可完成上述任务，而不必花费较大的代价去设计一台专用数字计算机。

- **硬件实现**

硬件实现是针对特定的应用目标，经优化，设计一专用的软硬件系统。其优点是容易做到实时处理，缺点是设备只能专用。

- **片上系统 (SOC, System on a Chip)**

随着大规模集成电路的发展，一个复杂数字信号处理系统已可以集成在一个芯片上。SOC 包含有数字和模拟电路、模拟和数字转换电路、微处理器、微控制器以及数字信号处理器等。与传统的集成电路不同的是，嵌入式软件的设计也被集成到了 SOC 的设计流程中，SOC 的设计方法将以组装为基础，采用自上至下的设计方法，在设计过程中大量重复使用自行设计或其他第三方拥有知识产权的 IP(Intelligent Property)模块。SOC 要充分考虑如何合理划分软件和硬件所实现的系统功能以及如何实现软、硬件之间的信息传递。SOC 将是数字信号处理系统的一个新型的实现方法。

并行、复用和流水

并行是指为了完成同一个任务，几个处理器同时工作，使系统能胜任单个处理器所不能完成的任务；当一个处理器完成单个任务(比如一个滤波器)有很大的富余量时，可让其完成多个任务，这就是复用；流水结构也是多处理器完成同一任务，它与并行结构的主要区别在于并行的各个处理器之间数据交换不多，而流水结构类似于生产中的流水线，数据经一道道“工序”处理。采用并行或流水结构，完全取决于数字信号处理的运算结构。

研究内容

经典的数字信号处理限于线性时不变系统理论，数字滤波和 FFT 是常用方法。

目前 DSP 研究热点： 时变非线性系统、非平稳信号、非高斯信号

处理方法的发展：自适应滤波、离散小波变换、高阶矩分析、盲处理、分形、混沌理论

课程介绍

基础理论：离散时间信号与系统（第一章）

 Z 变换（第一章）

 离散傅立叶变换 DFT 及其快速算法 FFT （第三章）

 无限长单位脉冲响应（IIR）滤波器（第四章）

 有限长单位脉冲响应（FIR）滤波器（第五章）

第一章 第一节内容:

第一章 离散时间信号

- 离散时间信号
- 线性移不变系统
- 常系数线性差分方程
- 连续时间信号的抽样

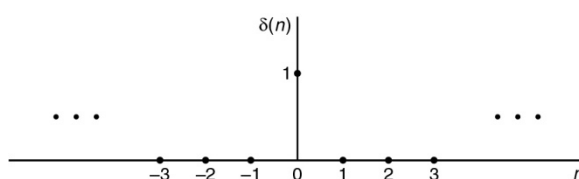
学习要求: 熟练掌握和运用采样定理; 掌握离散时间信号与系统的定义; 会判定系统的因果性和稳定性。

1.1 离散时间信号

一、主要常用序列

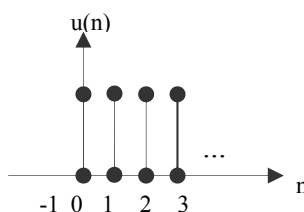
(1) 单位脉冲序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



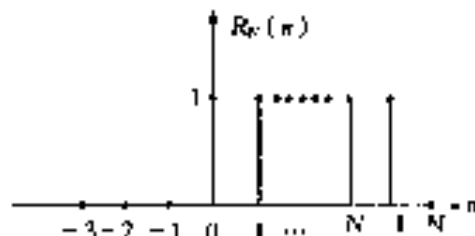
(2) 单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



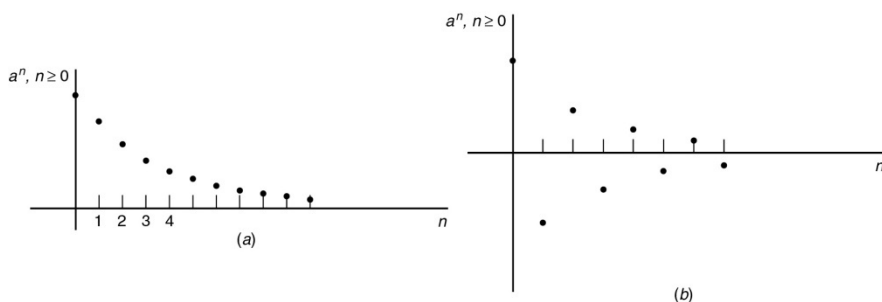
(3) 矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, n \geq N \end{cases}$$



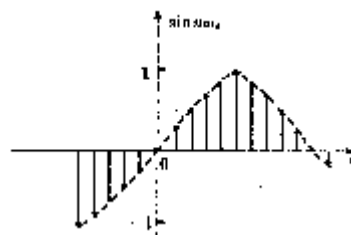
(4) 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n)$$



(5) 正弦序列

$$x(n) = \sin(n\omega_0)$$



注意: 正弦型序列不一定是周期序列

(6) 复指数序列

$$x(n) = Ae^{(\alpha + j\omega_0)n} = Ae^{\alpha n} (\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n)$$

当 $\alpha = 0$ 时 $x(n)$ 的实部和虚部，分别是余弦和正弦序列。

二、序列的运算

1、序列的移位 $y(n)=x(n-m)$ 当 m 为正时， $x(n-m)$ 表示依次右移 m 位；

$x(n+m)$ 表示依次左移 m 位。

2、序列的相加 $z(n)=x(n)+y(n)$ 是指同序号 n 的序列值逐项对应相加得一新序列。

3、序列的相乘 $f(n)=x(n)y(n)$ 是指同序号 (n) 的序列值逐项对应相乘。

4、序列的翻褶 如果有 $x(n)$ ，则 $x(-n)$ 是以 $n=0$ 为对称轴将 $x(n)$ 加以翻褶的序列。

5、序列的累加 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ 表示 n 以前的所有 $x(n)$ 的和。

6、前向差分和后向差分

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \quad (\text{先左移后相减}); \quad \nabla x(n) = x(n) - x(n-1) \quad (\text{先右移后相减})$$

7、序列的尺度变换

抽取: $x(n) \longrightarrow x(mn)$, m 为正整数; 插值: $x(n) \longrightarrow x(n/m)$, m 为正整数。

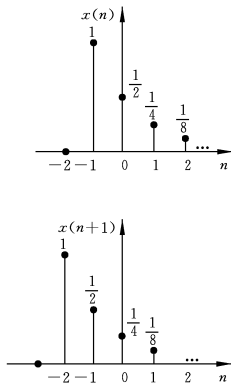


图 1-1 序列 $x(n)$ 及超前序列 $x(n+1)$

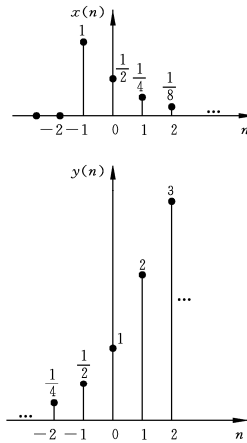


图 1-2 两序列相加

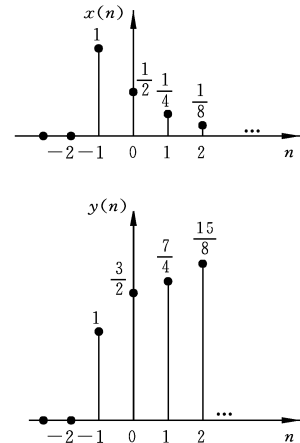


图 1-5 序列 $x(n)$ 及其累加序列 $y(n)$

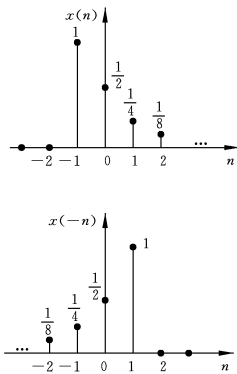


图 1-3 序列 $x(n)$ 及翻褶后的序列 $x(-n)$

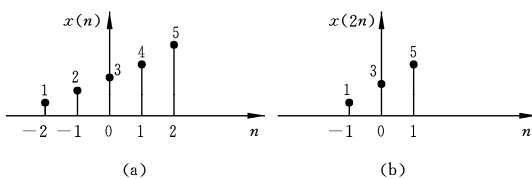


图 1-7 某序列及其抽取序列

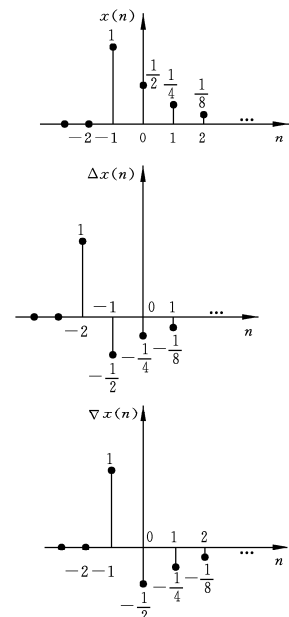


图 1-6 $x(n)$ 、前向差分 $\Delta x(n)$ 及后向差分 $\nabla x(n)$

8、序列的卷积和

设序列 $x(n)$, $h(n)$, 它们的卷积和 $y(n)$ 定义为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = x(n) * h(n)$$

卷积和计算分四步：折迭(翻褶), 位移, 相乘, 相加。

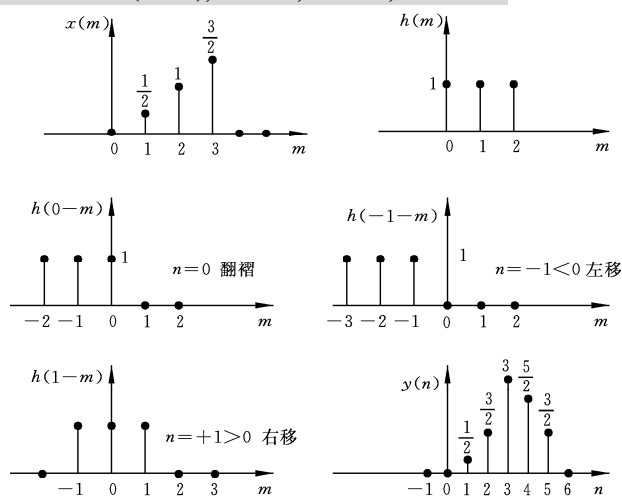


图 1-8 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积和图解

三、序列的周期性

如果存在一个最小的正整数 N , 满足 $x(n)=x(n+N)$, 则序列 $x(n)$ 为周期性序列, N 为周期。

四、用单位抽样序列表示任意序列

1、任意序列可表示成单位抽样序列的位移加权和。 $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$

2、 $x(n)$ 亦可看成 $x(n)$ 和 $\delta(n)$ 的卷积和

五、序列的能量

$x(n)$ 的能量定义为 $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$

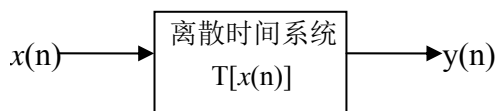
第一章 第二节内容:

1-2 线性移不变系统

一、线性系统

系统实际上表示对输入信号的一种运算, 所以离散时间系统就表示对输入序列的运算, 即

$$y(n) = T[x(n)]$$



线性系统具有均匀性和迭加性:

$$y_1(n) = T[x_1(n)], y_2(n) = T[x_2(n)],$$

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$$

*加权信号和的响应=响应的加权和。

*先运算后系统操作=先系统操作后运算。

二、移不变系统

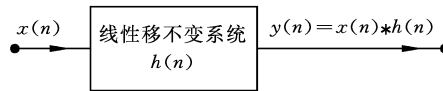
如 $T[x(n)]=y(n)$, 则 $T[x(n-m)]=y(n-m)$, 满足这样性质的系统称作移不变系统。

即系统参数不随时间变化的系统, 亦即输出波形不随输入加入的时间而变化的系统。

$$y(n) = x(n) \sin\left(\frac{2\pi}{9}n + \frac{\pi}{7}\right) \text{ 不是移不变}$$

*系统操作=函数操作

三、单位抽样响应与卷积和



第一章 第三节内容:

四.线性移不变系统的性质

1.交换律 $y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

2.结合律
$$\begin{aligned} x(n) * h_1(n) * h_2(n) &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\ &= [x(n) * h_2(n)] * h_1(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \end{aligned}$$

3.对加法的分配律
$$\begin{aligned} x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] \\ = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \end{aligned}$$

五.因果系统

某时刻的输出只取决于此刻以及以前时刻的输入的系统称作因果系统。

*实际系统一般是因果系统;

*对图象、已记录数据处理以及平均处理的系统不是因果系统;

* $y(n)=x(-n)$ 是非因果系统,因 $n < 0$ 的输出决定 $n > 0$ 时的输入;

线性移不变因果系统的充要条件为 $h(n)=0, n < 0$ 。

六.稳定系统

有界的输入产生有界的输出系统。

线性移不变稳定系统的充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = p < \infty$$

第一章 第四节内容:

1-3 常系数线性差分方程

离散变量 n 的函数 $x(n)$ 及其位移函数 $x(n-m)$ 线性叠加而构成的方程.

一.表示法与解法

1.表示法

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

* 常数项: $a_0, a_1, \dots, a_N; b_0, b_1, \dots, b_M$ 均是常数 (不含 n) .

*阶数: $y(n)$ 变量 n 的最大序号与最小序号之差, 如 $N=N-0$.

*线性: $y(n-k), x(n-m)$ 各项只有一次幂,不含它们的乘积项。

2.解法

时域: 迭代法, 卷积和法;

变换域：Z 变换法。

二.用迭代法求解差分方程

1.“松弛”系统的输出

起始状态为零的系统，这种系统用的较多，其输出就是 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

因此，已知 $h(n)$ 就可求出 $y(n)$ ，所以必须知道 $h(n)$ 的求法。

2.迭代法（以求 $h(n)$ 为例）

例：已知常系数线性差分方程为 $y(n]-ay(n-1)=x(n)$ ，试求单位抽样响应 $h(n)$ 。

解：因果系统有 $h(n)=0, n < 0$ ；方程可写作： $y(n]=ay(n-1)+x(n)$

$$y(n) = ay(n-1) + x(n),$$

当 $x(n) = \delta(n)$, $y(n) = h(n)$, 故

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n), \text{因此}$$

$$h(0) = ah(-1) + \delta(0) = 0 + 1 = 1$$

$$h(1) = ah(0) + \delta(1) = a \cdot 1 + 0 = a$$

$$h(2) = ah(1) + \delta(2) = a^2 + 0 = a^2$$

⋮

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$|a| < 1$ 是稳定系统

注意：

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n) = a^n + 0 = a^n$$

1.一个常系数线性差分方程并不一定代表因果系统，也不一定表示线性移不变系统。这些都由边界条件（初始）所决定。

2.我们讨论的系统都假定：常系数线性差分方程就代表线性移不变系统，且多数代表因果系统。

三.系统结构

1.系统的输入与输出的运算关系的表述方法。

2.差分方程可直接得到系统结构。

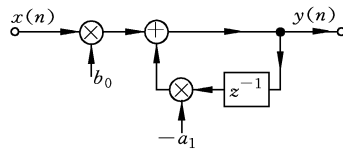
例： $y(n]=b_0x(n]-a_1y(n-1)$

用 \oplus 表示相加器；

用 \otimes 表示乘法器；

用 Z^{-1} 表示一位延时单元。

例：差分方程 $y(n]=b_0x(n]-a_1y(n-1)$ 表示的系统结构为：



1-4 连续时间信号的抽样

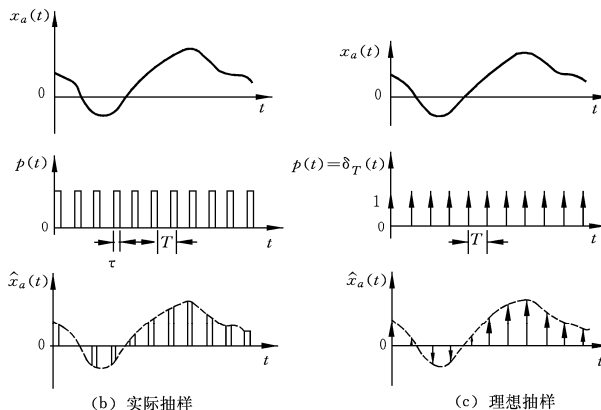
一.抽样器与抽样



1.抽样器

2. 抽样

对信号进行时间上的量化，这是对信号作数字化处理的第一个环节。



$$f_s = \frac{1}{T}$$

问题:

- 信号经采样后发生的变化（如频谱的变化）；
- 信号内容是否丢失（采样序列能否代表原始信号、如何不失真地还原信号）；
- 由离散信号恢复连续信号的条件？

2.实际抽样与理想抽样

实际抽样： $p(t)$ 为脉冲序列

抽样器一般由电开关组成，开关每隔 T 秒短暂地闭合一次，将连续信号接通，实现一次采样。如开关每次闭合 τ 秒，则采样器的输出一串重复周期为 T ，宽度为 τ 的脉冲，脉冲的幅度是这段时间内信号的幅度，如图 1.1(d)，这一采样过程可看作是一个脉冲调幅过程，脉冲载波是一串周期为 T 、宽度为 τ 的矩形脉冲，以 $P(t)$ 表示，调制信号是输入连续信号 $x_a(t)$ ，则采样输出为

$$X_p(t) = X_a(t)P(t)$$

一般 τ 很小， τ 越小，采样输出脉冲的幅度越接近输入信号在离散时间点上的瞬时值。

理想抽样： $p(t) = \delta_T(t)$ （冲激序列）

当抽样器的电开关闭合时间 $\tau \rightarrow 0$ 时，为理想采样。

采样序列表示为冲激函数的序列，这些冲激函数准确地出现在采样瞬间，其积分幅度准确地等于输入信号在采样瞬间的幅度，即：理想采样可看作是对冲激脉冲载波的调幅过程。

理想采样信号的数学表示：

用 $M(t)$ 表示冲击载波，

$$M(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

则有理想采样信号可表示为： $\hat{x}_s(t) = x_s(t)M(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(nT)\delta(t - nT)$

说明：实际情况下， $\tau=0$ 达不到，但 $\tau \ll T$ 时，实际采样接近理想采样，理想采样可看作是实际采样物理过程的抽象，便于数学描述，可集中反映采样过程的所有本质特性，理想采样对 Z 变换分析相当重要。

3.采样信号的频谱

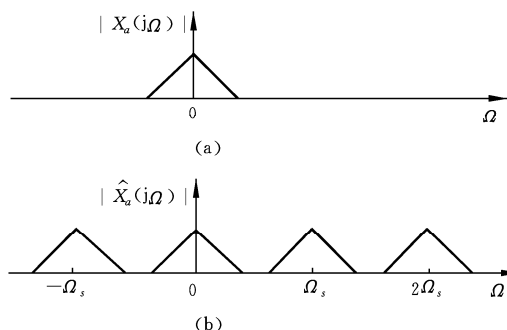
1)频谱延拓

问题：理想采样信号的频谱有何特点，它与连续信号频谱的关系？

对理想采样信号进行傅立叶变换，可以证明，理想采样信号的频谱是连续信号频谱的周期延拓，重复周期为 Ω_s (采样频率)，即

$$\hat{X}_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_s(j\Omega - jm\Omega_s)$$

其中 $\hat{X}_s(j\Omega)$ 为理想采样信号的频谱， $X_s(j\Omega)$ 为连续信号的付氏变换。显然， $\hat{X}_s(j\Omega)$ 是频率 Ω 的连续函数。





数字角频率

如果定义 $\omega = \Omega T = 2\pi f / f_s$ 并且将 $X_a(j\Omega)$ 的自变量用 ω 表示, 周期用 ω_s 表示, 则

$$\omega_s = \Omega_s T = 2\pi$$

即 $X_a(j\omega)$ 的周期为 2π 。 ω 即为数字角频率, 它是模拟域频率对采样频率 f_s 的归一化。数字角频率代表了序列值变化快慢的速率, 它只有相对的时间意义, 而没有绝对时间和频率的意义。

2) 采样定理

如果信号 $x_a(t)$ 是实带限信号, 且最高频谱不超过 $\Omega_s/2$, 即

$$X_a(j\Omega) = \begin{cases} X_a(j\Omega) & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0 & |\Omega| \geq \Omega_s/2 \end{cases}$$

那么理想采样频谱中, 基带频谱以及各次谐波调制频谱彼此是不重叠的, 用一个带宽为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器, 可以将各次谐波调制频谱滤除, 保留不失真的基带频谱, 从而不失真地还原出原来的连续信号。

如果信号最高频谱超过 $\Omega_s/2$, 那么在理想采样频谱中, 各次调制频谱就会互相交叠, 出现频谱的“混淆”现象, 如图。为简明起见, 图中将 $X_a(j\Omega)$ 作为标量处理, 一般 $X_a(j\Omega)$ 为复数, 交叠也是复数相加。当出现频谱混淆后, 一般就不可能无失真地滤出基带频谱, 用基带滤波恢复出来的信号就要失真。

因此, 称采样频率的一半 $\Omega_s/2$ 为折叠频率, 它好像一面镜子, 信号频谱超过它时, 就会被折迭回来, 造成频谱混淆。

奈奎斯特采样定理: 要使实信号采样后能够不失真还原, 采样频率必须大于信号最高频率的两倍, 即 $\Omega_s \geq 2\Omega_{\max}$ 。

实际工作中, 为避免频谱混淆, 采样频率总是选得比两倍信号最高频率 Ω_{\max} 更大些, 如 $\Omega_s > (3\sim 5)\Omega_{\max}$ 。同时, 为避免高于折叠频率的杂散频谱进入采样器造成频谱混淆, 采样器前常常加一个保护性的前置低通滤波器(抗混叠滤波器), 阻止高于 $\Omega_s/2$ 频率分量进入。

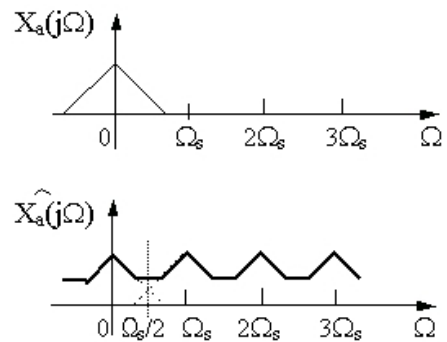
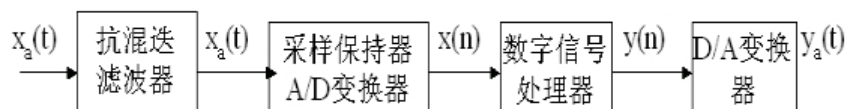


图1.4、频谱的混淆



抗混叠滤波器



图、抗混叠滤波器

抗混迭滤波器：理想采样信号的频谱是连续信号频谱以采样频率为周期的周期延拓，为避免采样信号频谱混迭产生失真而处理频带外的高频分量。

3) 采样信号的拉氏变换

理想采样后，信号的拉氏变换在 S 平面上沿虚轴周期延拓，也即 $\hat{x}_s(s)$ 在 S 平面上的虚轴上是周期函数。

4、采样的恢复（恢复信号）

如果理想采样满足奈奎斯特定理，信号最高频率不超过折迭频率，即 $x_a(j\Omega) = \begin{cases} x_a(j\Omega) & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0 & |\Omega| \geq \Omega_s/2 \end{cases}$

则理想采样的频谱就不会产生混叠，因此有 $\hat{x}_s(j\Omega) = \frac{1}{T} x_a(j\Omega)$ ， $|\Omega| < \Omega_s$

可见，将采样信号 $\hat{x}_s(t)$ 通过一个理想低通滤波器（只让基带频谱通过），其带宽等于折迭频率 $\Omega_s/2$ ，频率特性如图 1.5。

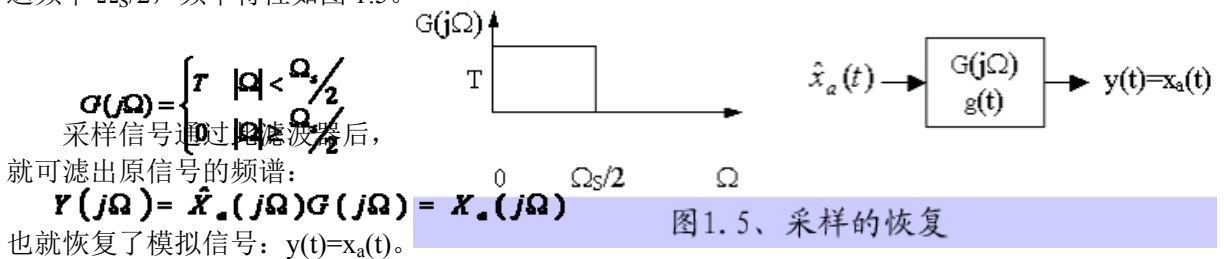


图 1.5、采样的恢复

实际上，理想低通滤波器是不可能实现的，但在满足一定精度的情况下，总可用一个可实现网络去逼近。

5、采样内插公式

问题：如何由采样信号表示连续信号，采样信号 $\hat{x}_s(t)$ 通过理想低通滤波器 $G(j\Omega)$ 的响应是什么？



内插公式推导

理想低通 $G(j\Omega)$ 的冲激响应为

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin \frac{\Omega_s}{2} t}{\frac{\Omega_s}{2} t} = \frac{\sin \frac{\pi}{T} t}{\frac{\pi}{T} t}$$

频域相乘对应时域卷积，利用卷积公式，则采样信号经理想低通后的输出为

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_s(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(\tau) \delta(\tau - nT) \right] g(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) g(t-\tau) \delta(\tau - nT) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) g(t-nT) \end{aligned}$$

这里， $g(t-nT)$ 称为内插函数， $g(t-nT) = \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t-nT)}{\frac{\pi}{T} (t-nT)}$

其特点为：在采样点 nT 上，函数值为 1，其余采样点上为零。

将内插函数代入前面的卷积公式，可得采样内插公式： $x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t-nT)}{\frac{\pi}{T} (t-nT)}$

采样内插公式告诉我们，连续函数 $x_a(t)$ 可以由它的采样值 $x_a(nT)$ 来表示，它等于 $x_a(nT)$ 乘上对应的内插函数的总和，即 $x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) g(t-nT)$

其中 $g(t-nT) = \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t-nT)}{\frac{\pi}{T} (t-nT)}$ 为内插函数，如图 1.6。

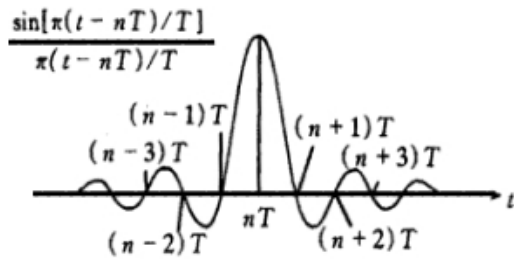


图1.6、内插公式

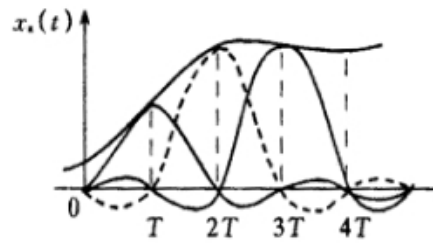


图1.7、采样内插恢复

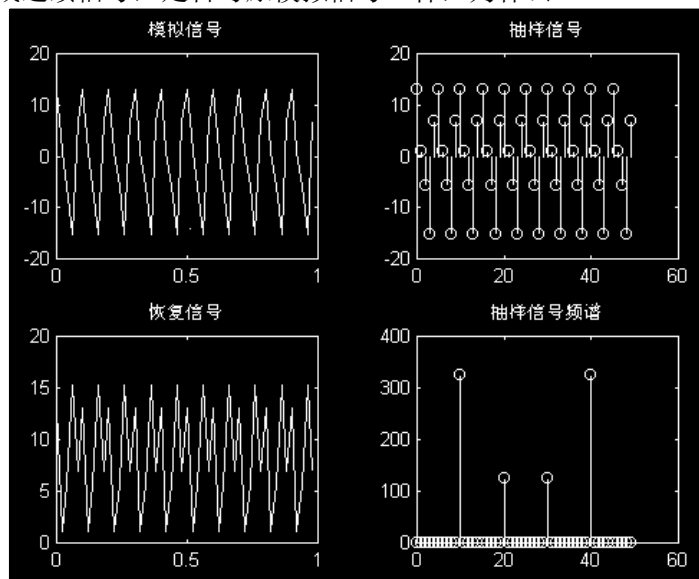
图 1.7 为由采样内插恢复的连续信号。图中，在每一个采样点上，由于只有该采样值对应的内插函数不为零，所以保证了各采样点上信号值不变，而采样之间的信号则由各采样值内插函数的波形延伸迭加而成。

内插公式表明只要满足采样频率高于两倍信号最高频率，整个连续信号就可以用它的采样值完全代表，而不损失任何信息，这就是奈奎斯特定律。

总结：

要想抽样后能不失真的还原出原信号，抽样频率必须大于等于两倍原信号最高频率分量。即 $\Omega_s \geq 2\Omega_h$ 这就是奈奎斯特取样定理。 $\frac{\Omega_s}{2}$ 常称作折叠频率。

例 1. 已知一模拟信号 $x(t)=3\cos(20\pi t)+5\sin(60\pi t)+10\cos(120\pi t)$, $f_s=50\text{Hz}$ 。试求：抽样后的 $x(n)$ ，若从 $x(n)$ 信号恢复成连续信号，是否与原模拟信号一样，为什么？



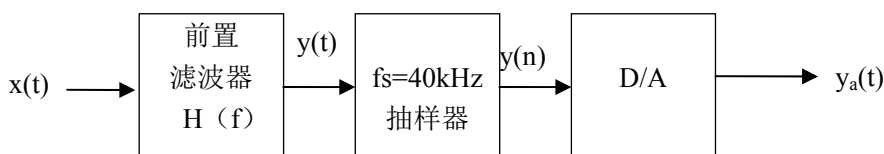
例 3. 一个声音信号

$$x(t)=2A\cos(10000\pi t)+2B\cos(30000\pi t)+2C\cos(50000\pi t)+2D\cos(60000\pi t)$$

试问 (1) 这个信号是由哪些频率构成的？(t:ms)

(2) 信号的哪些部分是可以听到的，为什么？

(3) 如果前置滤波器的截止频率为 20kHz，听到的是什么？



第一章习题分类:

- § 1.1——1, 2, 3, 4
- § 1.2——5, 6, 7, 8
- § 1.3——9, 10
- § 1.4——11
- 综合题: 12
- 提高题: 13
- 补充题: 14

第二章 z 变换

- Z 变换
- Z 反变换
- Z 变换性质
- Z 变换, 拉氏变换与 DFT 傅里叶变换之间的关系
- 系统响应与频率响应

学习要求: 熟练掌握付氏变换、Z 变换和系统函数。

2-1 引言

信号与系统的分析方法有时域、变换域两种。

一.时域分析法

1.连续时间信号与系统: 信号的时域运算, 时域分解, 经典时域分析法, 近代时域分析法, 卷积积分。

2.离散时间信号与系统: 序列的变换与运算, 卷积和, 差分方程的求解。

二.变换域分析法

1.连续时间信号与系统: 信号与系统的频域分析、复频域分析。

2.离散时间信号与系统: Z 变换, DFT(FFT)。Z 变换可将差分方程转化为代数方程。

2.2 Z 变换

一、Z 变换的定义

利用差分方程可求离散系统的结构及瞬态解。为了分析系统的另外一些重要特性, 如稳定性和频率响应等, 需要研究离散时间系统的 z 变换 (类似于模拟系统的拉氏变换), 它是分析离散系统和离散信号的重要工具。

一个离散序列 $x(n)$ 的 Z 变换定义为 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, 其中 z 为复变量, 是一个以实部为横坐标, 虚部为纵坐标构成的平面上的变量, 这个平面也称 z 平面。

双边 z 变换定义为: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

单边 z 变换定义为: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$, 即只对单边序列 ($n \geq 0$ 部分) 进行 z 变换。

单边 z 变换可以看成是双边 z 变换的一种特例, 即因果序列情况下的双边 z 变换。

二、z 变换的收敛域

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

一般，序列的 Z 变换并不一定对任何 z 值都收敛，z 平面上使上述级数收敛的区域称为“收敛域”。一般 Z 变换的收敛域为： $R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

我们知道，级数一致收敛的条件是绝对值和，因此 z 平面的收敛域应满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

因为对于实数序列， $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)||z|^{-n} < \infty$

因此，|z| 值在一定范围内才能满足绝对可和条件，这个范围一般表示为 $R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$ 。这就是收敛域，一个以 R_{x^-} 和 R_{x^+} 为半径的两个圆所围成的环形区域， R_{x^-} 和 R_{x^+} 称为收敛半径， R_{x^-} 和 R_{x^+} 的大小，即收敛域的位置与具体序列有关，特殊情况为 R_{x^-} 或 R_{x^+} 等于 0，这时圆环变成圆或空心圆。



四种序列的 Z 变换收

a. 有限长序列
 序列 $x(n) = \begin{cases} x(n) & n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ $X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$, 收敛域为 $0 < |z| < \infty$ 。

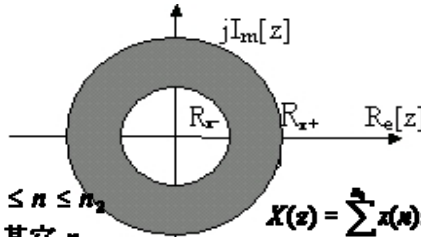


图 1.11、Z 变换的收敛域

因为 $X(z)$ 是有限项的级数和，只要级数每一项有界，有限项和也有界，所以有限长序列 z 变换的收敛域取决于 $|z|^{-n} < \infty$ ， $n_1 \leq n \leq n_2$ 。

显然 |z| 在整个开域 $(0, \infty)$ 都能满足以上条件，因此有限长序列的收敛域是除 0 及 ∞ 两个点（对应 $n > 0$ 和 $n < 0$ 不收敛）以外的整个 Z 平面： $0 < |z| < \infty$ 。如果对 n_1, n_2 加以一定的限制，如 $n_1 \geq 0$ 或 $n_2 \leq 0$ ，则根据条件 $|z|^{-n} < \infty$ ($n_1 \leq n \leq n_2$)，收敛域可进一步扩大为包括 0 点或 ∞ 点的半开域：

$$\begin{cases} 0 < |z| \leq \infty & n_1 \geq 0 \\ 0 \leq |z| < \infty & n_2 \leq 0 \end{cases}$$

例 1、序列 $x(n) = \delta(n)$ $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1 \times z^{-0} = 1$

由于 $n_1 = n_2 = 0$ ，其收敛域为整个闭域子平面， $0 \leq |z| \leq \infty$ 。

例 2. 矩形序列 $x(n) = R_N(n)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} R_N(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(N-1)}$$

等比级数求和 $x(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, 0 < |z| < \infty$

b. 右边序列

指 $x(n)$ 只在 $n \geq n_1$ ，有值，而 $n < n_1$ 时， $x(n) = 0$ ，这时 $X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$

其收敛域为收敛半径 R_{x^-} 以外的 z 平面，即 $|z| > R_{x^-}$ 。

右边序列中最重要的一种序列是“因果序列”即 $n_1=0$ 的右边序列，因果序列只在 $n \geq 0$ 有值， $n < 0$ 时， $x(n) = 0$ ，其 z 变换为： $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$

z 变换的收敛域包括 ∞ 点是因果序列的特征。

证明：

如果 $n_1 < 0$ ，则选择任一整数 $n_2 > 0$ ，使得 $\sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x(n)z^{-n}| + \sum_{n=n_2+1}^{\infty} |x(n)z^{-n}|$

由于第一项为有限长序列的 Z 变换，在 $(0, \infty)$ 收敛。对于第二项，总能在 $(0, \infty)$ 找到 $|z|=R$ （如 $R \geq 2 \max |x(n)|$ ）满足 $\sum_{n=n_2+1}^{\infty} |x(n)|R^{-n} < \infty$ 所以 $X(z)$ 在 $|z|=R$ 上收敛。

由此可进一步证明，在 R 圆以外，即 $R < |z| < \infty$ ， $x(z)$ 也必收敛。

再看第二项，由于 $n > n_2 \geq 0$ ， $|z| > R$ ，因此 $|z|^{-n} < R^{-n}$ ，故

$$\sum_{n=-n_1+1}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=-n_1+1}^{\infty} |x(n)| |z|^{-n} < \sum_{n=-n_1+1}^{\infty} |x(n)| R^{-n} < \infty$$

$$\therefore \sum_{n=-n_1}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty, R < |z| < \infty$$

由此证明右边序列的收敛域为 $|z| > R_x$ 。

c. 左边序列

序列 $x(n)$ 只在 $n \leq n_2$ 有值, $n > n_2$ 时, $x(n) = 0$ $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$
其收敛域在收敛半径为 R_x 的圆内, 即 $|z| < R_x$ 。

证明: 如 $x(z)$ 在 $|z|=R$ 上收敛, 即 $\sum_{n=-\infty}^{n_2} |x(n)| R^{-n} < \infty$

则在 $0 < |z| < R$ 上也必收敛, 任选一整数 $n_1 \leq 0$, $\sum_{n=-\infty}^{n_2} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{n_1} |x(n)z^{-n}| + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} |x(n)z^{-n}|$

\therefore 整个级数在 $|z| < R$ 上有 $\sum_{n=-\infty}^{n_2} |x(n)z^{-n}| < \infty$ 收敛域 $|z| < R_{x+}$ 。

d. 双边序列

可看作一个左边序列和一个右边序列之和, 因此双边序列 z 变换的收敛域是这两个序列 z 变换收敛域的公共部分。 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} + \sum_{n=-n_1+1}^{\infty} x(n)z^{-n}$

如果 $R_{x+} > R_x$, 则存在公共的收敛区间, $X(z)$ 有收敛域, $R_x < |z| < R_{x+}$ 。

如果 $R_{x+} < R_x$, 无公共收敛区间, $X(z)$ 无收敛域, 不收敛。

z 变换收敛域的特点:

- 收敛域是一个圆环, 有时可向内收缩到原点, 有时可向外扩展到 ∞ , 只有 $x(n) = \delta(n)$ 的收敛域是整个 z 平面;
- 在收敛域内没有极点, $x(z)$ 在收敛域内每一点上都是解析函数。

z 变换表示法:

- 级数形式;
- 解析表达式 (注意只表示收敛域上的函数, 同时要注明收敛域)。

2.3 反 Z 变换

已知函数 $X(z)$ 及其收敛域, 反过来求序列 $x(n)$ 的变换称为逆 z 变换, 常用 $Z^{-1}[X(z)]$ 表示。

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad \text{若} \quad R_x < |z| < R_{x+}$$

则逆 z 变换的一般公式为 $x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz \quad C \in (R_x, R_{x+})$

逆 z 变换是一个对 $X(z)z^{n-1}$ 进行的围线积分, 积分路径 C 是一条在 $X(z)$ 收敛环域 (R_x, R_{x+}) 以内反时针方向绕原点一周的单围线。



$$\text{证明: } \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m} z^{n-1} dz$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{(n-m)-1} dz$$

设积分路径 C 在半径为 R 的圆上, $k=n-m$, 即 $z=Re^{j\theta}$, $R_x < R < R_{x+}$, 则

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} R^{k-1} e^{j(k-1)\theta} j R e^{j\theta} d\theta$$

$$= \frac{R^k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jk\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

这个公式称为柯西积分定理。

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{(n-m)-1} dz = x(n) \quad (k = n - m)$$

因此

$$\text{或 } \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = x(n) \quad c \in (R_{x-}, R_{x+})$$

直接计算围线积分比较麻烦，一般不采用此法求 Z 反变换。

求解逆 z 变换的常用方法有：

- 幂级数
- 留数定律法
- 部分分式法

如果得到的 z 变换是幂级数形式的，则可以看出，序列值 x(n) 是幂级数

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

中 z^{-n} 项的系数，如果已经给出 X(z) 的函数表示，我们常常可以推导它的幂级数展开式或者利用已知的幂级数展开式。用长除法可获得幂级数展开式。

对于有理的 z 变换，围线积分通常可用留数定律计算， $x(n) = \sum \text{Res}[X(z) z^{n-1}, z_k]$ ，即为 $X(z) z^{n-1}$ 在围线 C 内所有极点 $\{z_k\}$ 上留数值的总和。

如果 z_k 是单阶极点，则 $\text{Res}[X(z) z^{n-1}, z_k] = (z - z_k) X(z) z^{n-1} \Big|_{z=z_k}$ 。

如果 z_k 是 N 阶极点，则 $\text{Res}[X(z) z^{n-1}, z_k] = \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} [(z - z_k)^N X(z) z^{n-1}] \Big|_{z=z_k}$ 。

常用序列 z 变换：

$$u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad 1 < |z| < \infty$$

$$R_N(n) \leftrightarrow \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad 0 < |z| < \infty$$

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad |a| < |z| < \infty$$

2.4 z 变换的性质

z 变换的许多重要性质在数字信号处理中常常要用到。

序列	z 变换	收敛域
1) x(n)	X(z)	$R_{x-} < z < R_{x+}$
2) y(n)	Y(z)	$R_{y-} < z < R_{y+}$
3) ax(n) + by(n)	aX(z) + bY(z)	$\max[R_{x-}, R_{y-}] < z < \min[R_{x+}, R_{y+}]$
4) x(n+no)	$z^{no} X(z)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
5) $a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$ a R_{x-} < z < a R_{x+}$
6) nx(n)	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
7) $x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
8) x(-n)	$X(1/z)$	$1/R_{x-} < z < 1/R_{x+}$
9) x(n)*y(n)	X(z)Y(z)	$\max[R_{x-}, R_{y-}] < z < \min[R_{x+}, R_{y+}]$
10) x(n)y(n)	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) Y(\frac{z}{v}) v^{-1} dv$	$R_x R_y < z < R_x R_y$
11) $x(0) = x(\infty)$		(因果序列) $ z > R_x$
12) $x(\infty) = \text{Res}[X(z), 1]$		$(z-1)X(z)$ 收敛于 $ z \geq 1$

z 变换的性质可由正反 z 变换的定义直接推导而得。



例：性质 5)

$$Z[a^n x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = -z \frac{d[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}]}{dz} = z \cdot n \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nx(n)] z^{-n}$$

$$= Z[nx(n)]$$

性质 6)

帕塞伐尔 (Parseval) 定理——z 变换的重要性质之一

若有两序列 $x(n)$, $y(n)$, 且

$$\begin{aligned} X(z) &= Z[x(n)] & R_{x-} < |z| < R_{x+} \\ Y(z) &= Z[y(n)] & R_{y-} < |z| < R_{y+} \end{aligned}$$

它们的收敛域满足条件: $R_{x-} R_{y-} < 1, R_{x+} R_{y+} > 1$

$$\text{则 } \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y^*(1/v^*)v^{-1}dv$$

, C 所在收敛域在 $X(v)$ 和 $Y^*(1/v^*)$ 两者收敛区域的重迭范围内 $\text{Max}[R_{x-}, 1/R_{y+}] < |v|$

$< \text{min}[R_{x+}, 1/R_{y-}]$ 。



证明: 令 $w(n) = x(n)y^*(n)$ 利用复序列共轭及复数乘积特性:

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } Z[x(n)y(n)] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C x(v)y(z/v)v^{-1}dv & R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+} \\ W(z) = Z[w(n)] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C x(v)y^*(z^*/v^*)v^{-1}dv \end{aligned}$$

由于假设条件中已规定收敛域满足 $R_{x-}R_{y-} < 1 < R_{x+}R_{y+}$

因此 $|z|=1$ 在收敛域内, 即 $W(z)$ 在单位圆上收敛, $W(z)|_{z=1}$ 存在,

$$w(1) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C x(v)y^*(1/v^*)v^{-1}dv$$

$$\text{又因 } w(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)z^{-n} \Big|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)$$

$$\text{因此 } \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C x(v)y^*(1/v^*)v^{-1}dv$$

证毕。

如果 $X(v)$ 、 $Y(v)$ 在单位圆上收敛, 则选取单位圆为围线积分途径, 这时 $v=e^{j\omega}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

序列能量的计算: Parseval 定理的一个重要应用是计算序列能量。

$$\begin{aligned} \text{因 } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n)^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(e^{j\omega})x^*(e^{j\omega})d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned}$$

可见, 时域中对序列求能量与频域中求能量是一致的。

2.5 Z 变换, 拉氏变换与 DFT 傅里叶变换之间的关系

序列的 z 变换: $x(n) \rightarrow X(z)$ 即 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

连续时间信号的 Laplace 变换: $x_a(t) \rightarrow X_a(s)$ 即 $X_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-st} dt$

连续时间信号的 Fourier 变换: $x_a(t) \rightarrow X_a(j\Omega)$ 即 $X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt$

一. Z 变换与拉氏变换的关系

1. 理想抽样信号的拉氏变换

设 $x_a(t)$ 为连续信号, $\hat{x}_a(t)$ 为其理想抽样信号, 它们的 Laplace 变换分别为: $X_a(s) = \mathcal{L}[x_a(t)]$

$$\hat{X}_a(s) = \mathcal{L}[\hat{x}_a(t)] \quad \text{则} \quad \hat{X}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-st} dt \quad \text{而} \quad \hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t-nT)$$

故

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(s) &= \mathcal{L}[\hat{x}_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t-nT) \right] e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-st} \delta(t-nT) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-nTs} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) (e^{sT})^{-n} \end{aligned} \quad \text{因此, } \hat{X}_a(s) = \mathcal{L}[\hat{x}_a(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) (e^{sT})^{-n}$$

序列 $x(n)$ 的 z 变换为 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, 考虑到 $x(n) = x_a(nT)$, 显然, 当 $z = e^{sT}$ 时, 序列 $x(n)$ 的 z 变换就等于理想抽样信号的拉氏变换。

$$\text{即} X(z) \Big|_{z=e^{sT}} = X(e^{sT}) = \hat{X}_a(s)$$

2. Z 变换与拉氏变换的关系(S、Z 平面映射关系)

S 平面用直角坐标表示为: $s = \sigma + j\Omega$

Z 平面用极坐标表示为: $z = re^{j\omega}$

又由于 $z = e^{sT}$ 所以有: $z = re^{j\omega} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\Omega T}$

因此, $r = e^{\sigma T}$, $\omega = \Omega T$; 这就是说, Z 的模只与 S 的实部相对应, Z 的相角只与 S 虚部 Ω 相对应。

(1). r 与 σ 的关系 ($r = e^{\sigma T}$)

$\sigma = 0$, 即 S 平面的虚轴 $r = 1$, 即 Z 平面单位圆;

$\sigma < 0$, 即 S 的左半平面 $r < 1$, 即 Z 的单位圆内;

$\sigma > 0$, 即 S 的右半平面 $r > 1$, 即 Z 的单位圆外。

(2). ω 与 Ω 的关系 ($\omega = \Omega T$)

$\Omega = 0$, S 平面的实轴,

$\omega = 0$, Z 平面正实轴;

$\Omega = \Omega_0$ (常数), S: 平行实轴的直线,

$\omega = \Omega_0 T$, Z: 始于原点的射线;

$\Omega \in (-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T})$, S: 宽 $\frac{2\pi}{T}$ 的水平条带,

$\omega \in (-\pi, \pi)$ 整个 Z 平面。

二. Z 变换和傅氏变换的关系

连续信号经理想抽样后, 其频谱产生周期延拓,

$$\text{即} \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\frac{2\pi}{T})$$

我们知道, 傅氏变换是拉氏变换在虚轴 $S=j\Omega$ 的特例, 因而映射到 Z 平面上为单位圆。因此,

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega T}} = X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}_a(j\Omega)$$

这就是说, (抽样) 序列在单位圆上的 Z 变换, 就等于理想抽样信号傅氏变换。

用数字频率 ω 作为 Z 平面的单位圆的参数, ω 表示 Z 平面的辐角, 模拟频率 Ω 为 s 平面虚轴, 则有 $\omega = \Omega T$

考虑到 $\omega = \Omega T$, 则 $X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \hat{X}_a(j\Omega)$

$$\text{又} \because \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\frac{2\pi}{T}) \quad \therefore X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega - 2k\pi}{T})$$

所以, 序列在单位圆上的 Z 变换为序列的傅氏变换。

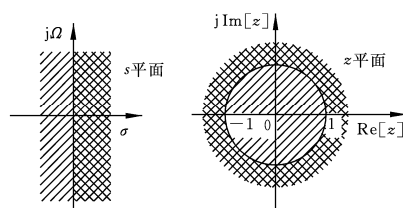


图 2-17 $\sigma \geq 0$ 分别映射成 $r \geq 1$

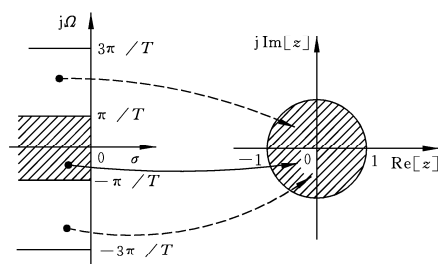


图 2-18 s 平面与 z 平面的多值映射关系
(以 s 平面左半平面为例, s 右半平面则以相同方式映射到 z 平面单位圆外)

第一章 第四节内容:

1.4 系统函数与频率响应

一、系统函数

1、定义

我们知道，用单位脉冲响应 $h(n)$ 可以表示线性时不变离散系统，这时

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

两边取 z 变换 $Y(z) = X(z)H(z)$

则 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ 定义为系统函数。它是单位脉冲响应的 z 变换。单位圆上的系统函数 $z=e^{j\omega}$ 就是系统的频率响应。所以可以用单位脉冲响应的 z 变换来描述线性时不变离散系统。

2、几种常用系统

因果系统——单位脉冲响应 $h(n)$ 是因果序列的系统，其系统函数 $H(z)$ 具有包括 ∞ 点的收敛域： $R_x - < |z| \leq \infty$

稳定系统：单位脉冲响应 $h(n)$ 满足绝对可和， $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$
因此稳定系统的 $H(z)$ 必须在单位圆上收敛，即 $H(e^{j\omega})$ 存在。

因果稳定系统：最普遍最重要的一种系统，其系统函数 $H(z)$ 必须在从单位圆到 ∞ 的整个领域收敛，即 $1 \leq |z| \leq \infty$ ， $H(z)$ 的全部极点在单位圆以内。因此，因果稳定系统的系统函数的全部极点必须在单位圆以内。

3、差分方程与系统函数

我们知道，线性时不变离散系统也可用差分方程表示，考虑 N 阶差分方程

$$\sum_{i=0}^N b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i)$$

两边取 z 变换：

$$\sum_{i=0}^N b_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} X(z)$$

于是 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}$

上式的分子与分母多项式也可用因子的形式来表示 $H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - d_i z^{-1})}$

式中 $\{c_i\}$ 是 $H(z)$ 在 z 平面上的零点， $\{d_i\}$ 是 $H(z)$ 在 z 平面上的极点，因此，除比例常数 A 以外，整个系统函数可以由全部零、极点来唯一确定。

4、系统函数的收敛域

用系统函数 $H(z)$ 表示一个系统时， $H(z)$ 的收敛域对确定系统性质很重要。相同的系统函数，收敛域不同，所代表的系统可能完全不同。



例 1：已知系统函数为 $H(z) = \frac{0.95}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.1z)} \quad 10 < |z| \leq \infty$

求系统的单位脉冲响应及系统性质。

系统函数 $H(z)$ 有两个极点， $z_1=0.5$ ， $z_2=10$ 。收敛域包括 ∞ 点，因此系统一定是因果系统，但单位圆不在收敛域内，因此可判定系统是不稳定的。

$$\begin{aligned} h(n) &= Z^{-1}[H(z)] \\ &= \begin{cases} \text{Res}[H(z)z^{n-1}, 0.5] + \text{Res}[H(z)z^{n-1}, 10] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \\ &= (0.5^n - 10^n)u(n) \end{aligned}$$



例 2：系统函数不变，但收敛域不同

$$H(z) = \frac{0.95}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.1z)} \quad 0.5 < |z| < 10$$

求单位脉冲响应及系统性质。

解：收敛域是包括单位圆而不包括 ∞ 点的有限环域，判定系统是稳定的，但是非因果的。

用留数定理求 $H(z)$ 的反变换：

注意到极点 $z_2=10$ 在积分围线（收敛域内的围线）以外，并且要考虑 $n < 0$ 时，

$$H(z)z^{n-1} = \frac{0.95 z^n}{(z - 0.5)(1 - 0.1z)} \quad \text{有一 } n \text{ 阶极点出现在 } z=0 \text{ 处，因此}$$

$$h(n) = \begin{cases} \operatorname{Re} s[H(z)z^{n-1}, 0.5] & n \geq 0 \\ \operatorname{Re} s[H(z)z^{n-1}, 0.5] + \operatorname{Re} s[H(z)z^{n-1}, 0] & n < 0 \end{cases}$$

$$h(n) = 0.5^n u(n) + 10^n u(-n-1)$$

由于存在 $u(-n-1)$ 项, 因此系统是非因果的, 同时也不难证明 $h(n)$ 是绝对可积的, 所以系统是稳定的. 以上两例表明, 同一个系统函数, 由于收敛域不同, 它们所代表的系统完全不同.

二、系统频响的几何确定法

用极点和零点表示系统函数的优点是, 它提供了一种有效的求系统频率响应的几何方法.

一个 N 阶的系统函数可用它的零极点表示为

$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^N (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - d_i z^{-1})} = A \frac{\prod_{i=1}^N (z - c_i)}{\prod_{i=1}^N (z - d_i)}$$

系统的频响为: $H(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_{i=1}^N (e^{j\omega} - c_i)}{\prod_{i=1}^N (e^{j\omega} - d_i)}$

在 z 平面上, $e^{j\omega} - c_i$ 可用一根由极点 c_i 指向单位圆上 $e^{j\omega}$ 点的向量 \vec{p}_i 来表示, 而 $e^{j\omega} - d_i$ 可用极点 d_i 指向 $e^{j\omega}$ 的向量 \vec{q}_i 表示。

$$\text{于是 } H(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_{i=1}^N p_i}{\prod_{i=1}^N q_i}$$

$$\text{令 } \vec{p}_i = p_i e^{j\theta_i}, \vec{q}_i = q_i e^{j\phi_i}, H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\text{则 } \begin{cases} |H(e^{j\omega})| = |A| \frac{\prod_{i=1}^N p_i}{\prod_{i=1}^N q_i} \\ \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \alpha_i - \sum_{i=1}^N \beta_i + \phi_A \end{cases}$$

分析上式表明, 频响的模函数由从各零、极点指向 $e^{j\omega}$ 点的向量幅度来确定, 而频响的相位函数则由这些向量的幅角来确定, 当频率 ω 由 $0 \rightarrow 2\pi$ 时, 这些向量的终端点沿单位圆反时针方向旋转一圈, 由此可估算出整个系统的频响来。

其基本原理是, 当单位圆上的 $e^{j\omega}$ 点在极点 d_i 附近时, 向量最短, q_i 出现极小值, 频响在这附近可能出现峰值, 且极点 d_i 越靠近单位圆, q_i 的极小值越小, 频响出现的峰值越尖锐, 当 d_i 处在单位圆上时, q_i 的极小值为零, 相应的频响将出现 ∞ , 这相当于在该频率处出现无耗 ($Q = \infty$) 谐振, 当极点超出单位圆时系统就处于不稳定状态. 对于现实系统, 这是不希望的.

对于零点位置, 频响将正好相反, $e^{j\omega}$ 点越接近某零点 c_i , 频响越低, 因此在零点附近, 频响出现谷点, 零点越接近单位圆, 谷点越接近零, 零点处于单位圆上时, 谷点为零, 即在零点所在频率上出现传输零点, 零点可以位于单位圆以外, 不受稳定性约束.

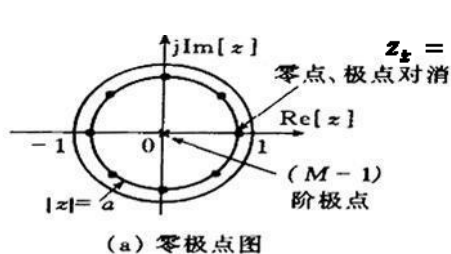
这种几何方法为我们认识零、极点分布对系统性能的影响提供了一个直观的概念, 这一概念对系统的分析和设计都十分重要.



例 3. 有限长单位脉冲响应求其频率响应特性.

$$h(n) = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad 0 < a < 1$$

$$\text{解: } H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} a^n z^{-n} = \frac{1 - a^M z^{-M}}{1 - a z^{-1}} = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z - a)}$$

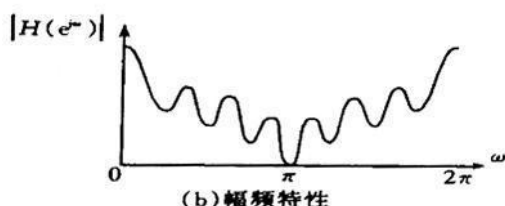


(a) 零极点图

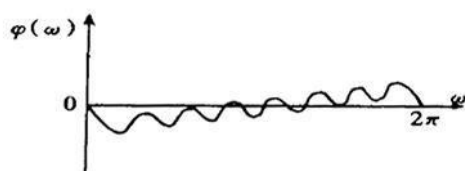
如果 k 为 0, 实数, $M < 1$ 的零点为这些零点分布在 $|z|=a$ 的圆周上, 对圆周进行 M 等分, 它的第一个零点 $k=0$, 恰好与分母上的极点 ($z=a$) 抵消, 因此, 整个函数 $H(z)$ 共有

$\begin{cases} (M-1) \text{ 个零点} \\ (M-1) \text{ 阶极点} \end{cases}$

$\begin{cases} z_k = a e^{j\frac{2\pi k}{M}} \\ \text{均集中在原点处} \end{cases} \quad z_0 = 0$



(b) 幅频特性



(c) 相位特性

左图给出 $M=8$, $0 < a < 1$ 时的系统特性, 幅频的峰值出现在 $\omega=0$, 因为该处无零点 (被极点对消), 每一零点附近的频率响应均有陷落, 呈现出 M 次起伏, 当 M 无限增大时, 波纹趋于平滑, 系统函数趋于书上例 4 一阶系统的结果。

第三章 第一节内容:

第三章 离散付里叶变换

- 离散付里叶级数 (DFS) —— 周期序列
- 离散付里叶变换 (DFT)

学习要求: 熟练掌握和运用 DFT 及其有关性质。

引言:

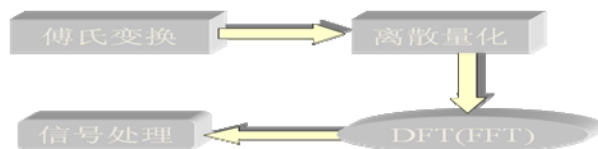
一、DFT 是重要的变换

1. 分析有限长序列的有用工具。
2. 在信号处理的理论上有重要意义。
3. 在运算方法上起核心作用, 谱分析、卷积、相关都可以通过 DFT 在计算机上实现。

二、DFT 是现代信号处理桥梁

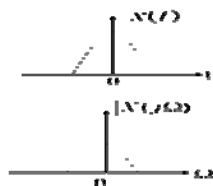
DFT 要解决两个问题:

- 一是离散与量化,
- 二是快速运算。



傅氏变换的几种可能形式:

一. 非周期连续时间、连续频率的傅氏变换----傅氏变换



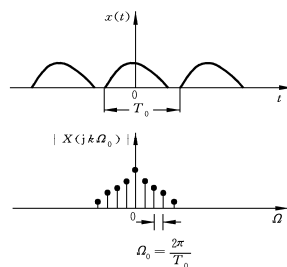
$$\text{正: } X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

$$\text{反: } x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

Ω 是模拟频率

时域信号	频域信号
连续的	非周期的
非周期的	连续的

二. 周期连续时间、离散频率的傅里叶变换----傅氏级数



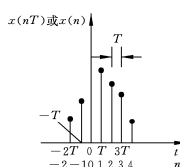
$$\text{正: } X(jk\Omega_0) = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

$$\text{反: } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

*时域周期为 T_p ,
频域谱线间隔为 $2\pi/T_p$

时域信号	频域信号
连续的	非周期的
周期的	离散的

三. 离散时间、周期连续频率的傅氏变换----序列的傅氏变换



$$|X(e^{j\omega})| \text{ 或 } |X(e^{j\Omega})|$$

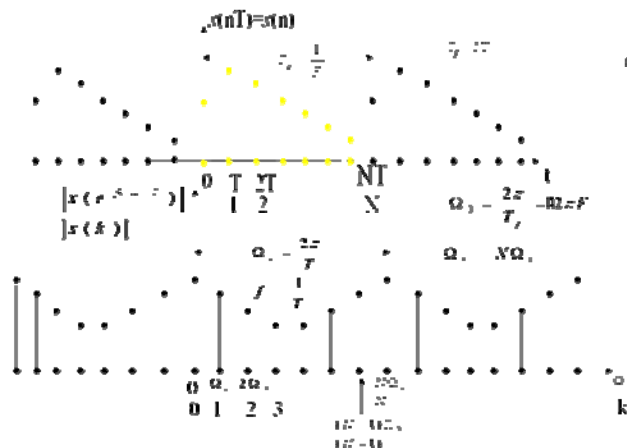
$$\text{正: } X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\Omega T}$$

*时域抽样间隔为 T , 频域的周期为 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$$\text{反: } x(nT) = \frac{1}{\Omega_s} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} X(e^{j\Omega T})e^{jn\Omega T} d\Omega$$

时域信号	频域信号
离散的	周期的
非周期的	连续的

四. 离散时间、离散频率的傅氏变换----DFT



由上述分析可知, 要想在时域和频域都是离散的, 那么两域必须是周期的。

时域信号	频域信号
离散的	周期的
周期的	离散的

*时域是周期为 T_p 函数, 频域的离散间隔为 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$;

时域的离散间隔为 T , 频域的周期为 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 。

结论:

时间函数	频率函数
连续、非周期性	非周期、连续
连续、周期性	非周期、离散
离散、非周期性	周期、连续
离散、周期性	周期、离散

3-1 周期序列的离散付里叶级数 (DFS)

前面我们讨论用付里叶变换和 z 变换来描述一般的序列和线性时不变离散系统。但有时序列是有限长序列, 如 FIR 系统的单位脉冲响应就是一个有限长序列。对于这种情况, 正如本章要讨论的, 可以导出另一种付里叶表示式, 称作离散付里叶变换(DFT)。离散付里叶变换是有限长序列付里叶表示式, 它本身也是一个序列, 而不是一个连续函数, 它相当于把信号的付里叶变换进行等频率间隔取样。离散付里叶变换除了作为有限长序列的一种付里叶表示式在理论上相当重要外, 由于存在计算离散付里叶变换有效算法, 因而其在实现各种数字信号处理算法时起着核心作用。

为了便于更好地理解 DFT 的概念, 先讨论周期序列及其离散付里叶级数 (DFS) 表示。



离散付里叶级数 (DFS)

我们用 $\tilde{x}(n)$ 来表示一个周期为 N 的周期序列, 即

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN) \quad , \quad k \text{ 为任意整数, } N \text{ 为周期。}$$

一个周期序列的离散付里叶级数为:
$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(2\pi/N)kn}$$

系数 $\tilde{X}(k)$ 本身也是一个周期序列, 周期为 N 。(系数 $\tilde{X}(k)$ 的求解)

说明:

周期序列不能进行 Z 变换, 因为其在 $n=-\infty$ 到 $+\infty$ 都周而复始永不衰减, 在整个 z 平面上任何地方找不到一个衰减因子 $|z|$ 能使序列绝对可和: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)| |z|^{-n} < \infty$

即 z 平面上没有收敛域。但是, 正弦连续时间周期信号可用付氏级数表达, 周期序列也可用离散的付氏级数来表示, 也即用周期为 N 的正弦序列来表示。

周期为 N 的正弦序列其基频成分为: $e_1(n) = e^{j(2\pi/N)n}$

K 次谐波序列为: $e_k(n) = e^{j(2\pi/N)kn}$

但离散级数所有谐波成分中只有 N 个是独立的, 这是与连续付氏级数的不同之处, 因为 $e^{j(2\pi/N)(k+N)n} = e^{j(2\pi/N)kn}$ 因此 $e_{k+N}(n) = e_k(n)$

将周期序列展成离散付里叶级数时, 只要取 $k=0$ 到 $(N-1)$ 这 N 个独立的谐波分量, N 以上的部分都可合并到这 N 个独立的谐波分量中, 所以一个周期序列的离散付里叶级数只需包含这 N 个复指数。

周期序列的离散付里叶级数 (DFS) 变换对:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi/N)kn} \\ \tilde{x}(n) &= IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(2\pi/N)kn}\end{aligned}$$



习惯上: 记 $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$, 称为旋转因子, 则 DFS 变换对可写为说明。

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} = DFS[\tilde{x}(n)] \\ \tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} = IDFS[\tilde{X}(k)]\end{aligned}$$

DFS[·] —— 离散付里叶级数变换

IDFS[·] —— 离散付里叶级数反变换

DFS 变换对公式表明, 一个周期序列虽然是无穷长序列, 但是只要知道它一个周期的内容 (一个周期内信号的变化情况), 其它的内容也就都知道了, 所以这种无穷长序列实际上只有 N 个序列值的信息是有用的, 因此周期序列与有限长序列有着本质的联系。



DFS 的主要特性。

假设 $\tilde{x}(n), \tilde{y}(n)$ 都是周期为 N 的两个周期序列, 各自的离散付里叶级数为:

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] \\ \tilde{Y}(k) = DFS[\tilde{y}(n)] \end{cases} \quad DFS[a\tilde{x}(n) + b\tilde{y}(n)] = a\tilde{X}(k) + b\tilde{Y}(k) \quad a, b \text{ 为任意常数}$$

1) 线性

2) 序列移位 $\begin{cases} DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k) \\ IDFS[\tilde{X}(k+l)] = W_N^{nl} \tilde{x}(n) \end{cases}$



移位序列——证明

因为 $\tilde{x}(n)$ 及 W_N^{kn} 都是以 N 为周期的函数, 所以有

$$\begin{aligned}DFS[\tilde{x}(n+m)] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) W_N^{kn} = \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ki} W_N^{-km} \\ &= W_N^{-mk} \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ki} \\ &= W_N^{-mk} \sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ki} + W_N^{-mk} \sum_{i=N}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ki} \\ &= W_N^{-mk} \sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ki} + W_N^{-mk} \sum_{l=0}^{m-1} \tilde{x}(l+N) W_N^{k(l+N)} \\ &= W_N^{-mk} \sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ki} + W_N^{-mk} \sum_{l=0}^{m-1} \tilde{x}(l) W_N^{kl} \\ &= W_N^{-mk} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ki} = W_N^{-mk} DFS[\tilde{x}(n)]\end{aligned}$$

由于 $\tilde{x}(n)$ 与 $\tilde{X}(k)$ 对称的特点, 同样的方法可证明 $IDFS[\tilde{X}(k+l)] = W_N^{nl} \tilde{x}(n)$

3) 周期卷积

若 $\tilde{Y}(k) = \tilde{X}(k)\tilde{Y}(k)$, $\tilde{f}(n) = \text{IDFS}[\tilde{F}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m)\tilde{y}(n-m)$,
 或 $-\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{y}(m)\tilde{x}(n-m)$ 。

证明:
$$\begin{aligned} \tilde{f}(n) &= \text{IDFS}[\tilde{X}(k)\tilde{Y}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\tilde{Y}(k)w_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m)w_N^{mk}\tilde{y}(k)w_N^{-kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{y}(k)w_N^{-(n-m)k} \right] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m)\tilde{y}(n-m) \end{aligned}$$

这是一个卷积公式，但与前面讨论的线性卷积的差别在于，这里的卷积过程只限于一个周期内（即 $m=0 \sim N-1$ ），所以称为周期卷积。

由于 DFS 与 IDFS 的对称性，对周期序列乘积，存在着频域的周期卷积公式：

若 $\tilde{f}(n) = \tilde{x}(n)\tilde{y}(n)$

则
$$\tilde{F}(k) = \text{DFS}[\tilde{f}(n)] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}(l)\tilde{Y}(k-l) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}(k-l)\tilde{Y}(l)$$

第三章 第二节内容:

3-2 离散付里叶变换 (DFT)

从上节的讨论，我们知道周期序列实际上只有有限个序列值有意义，因此它的许多特性可沿用到有限长序列上。



离散付里叶变换



周期序列的主值区间和主值序列。

定义一个有限长序列 $x(n)$ ，长为 N ，

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其余 } n \end{cases} \quad (\text{只有 } n=0 \sim N-1 \text{ 个点上有非零值，其余为零。})$$

为了利用周期序列的特性，假定周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，是由有限长序列 $x(n)$ 以周期为 N 延拓而成的，它们的关系为：

$$\begin{cases} \tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \\ x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其余 } n \end{cases} \end{cases}$$

对于周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，定义其第一个周期 $n=0 \sim N-1$ 为 $\tilde{x}(n)$ 的“主值区间”，主值区间上的序列为主值序列 $x(n)$ 。 $x(n)$ 与 $\tilde{x}(n)$ 的关系可描述为：

$$\begin{cases} \tilde{x}(n) \text{ 是 } x(n) \text{ 的周期延拓} \\ x(n) \text{ 是 } \tilde{x}(n) \text{ 的主值序列} \end{cases}$$

数学表示式为：
$$\begin{cases} \tilde{x}(n) = x((n))_N \\ x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \end{cases}$$

其中 $R_N(n)$ 为矩形序列，符号 $((n))_N$ 是余数运算表达式，表示 n 对 N 求余数。

例： $\tilde{x}(n)$ 是周期为 $N=8$ 的序列，求 $n=11$ 和 $n=-2$ 对 N 的余数

$$n = 11 = 1 \times 8 + 3 \Rightarrow ((11))_8 = 3$$

$$n = -2 = (-1) \times 8 + 6 \Rightarrow ((-2))_8 = 6$$

因此 $\tilde{x}(11) = x(3)$, $\tilde{x}(-2) = x(6)$

$\tilde{X}(k)$ 的主值区间和主值序列：

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的离散付氏级数 $\tilde{X}(k)$ 也是一个周期序列，因而也可给它定义一个主值区间 $0 \leq k \leq N-1$ 和主值序列 $X(k)$ 。

$$\begin{cases} X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \\ \tilde{X}(k) = X((k))_N \end{cases}$$



有限长序列离散付里叶变换。

考虑到周期序列的离散付里叶级数变换 (DFS) 和反变换 (IDFS) 公式中, 求和都只限于主值区间 (求和 $0 \sim N-1$), 它们完全适用于主值序列 $x(n)$ 与 $X(k)$, 因而我们可得到一个新的定义——有限长序列离散付里叶变换定义。

长度为 N 的有限长序列 $x(n)$, 其离散付里叶变换 $X(k)$ 仍是一个长度为 N 的频域有限长序列, 它们的关系为

$$\begin{cases} X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w_N^{-kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)w_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

$x(n)$ 与 $X(k)$ 是一个有限长序列离散付里叶变换对, 已知 $x(n)$ 能唯一地确定 $X(k)$, 同样已知 $X(k)$ 也能唯一地确定 $x(n)$, 实际上 $x(n)$ 与 $X(k)$ 都是长度为 N 的序列 (复序列) 都有 N 个独立值, 因而具有等量的信息。

例 $x(n) = \cos \frac{n\pi}{6}$ 是一个 $N=12$ 的有限长序列, 由 DFT 得 $X(k) = \begin{cases} 6 & k=1,11 \\ 0 & \text{其它 } k \end{cases}$ 。



DFT 特性

DFT 的一些主要特性都与周期序列的 DFS 有关。

假定 $x(n)$ 与 $y(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, 其各自的离散付里叶变换分别为

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$$

(1) 线性性

$\text{DFT}[ax(n)+by(n)] = aX(k)+bY(k)$, a, b 为任意常数

(2) 圆周移位

有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位定义为: $f(n) = x((n+m))_N R_N(n)$

图的说明: $x((n+m))_N$ 表示 $x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 的移位: $x((n+m))_N = \tilde{x}(n+m)$

$x((n+m))_N R_N(n)$ 表示对移位的周期序列 $\tilde{x}(n+m)$ 取主值序列。所以 $f(n)$ 仍然是一个长度为 N 的有限长序列。 $f(n)$ 实际上可看作序列 $x(n)$ 排列在一个 N 等分圆周上, 并向左旋转 m 位。

序列圆周移位后的 DFT 为: $F(k) = \text{DFT}[f(n)] = W_N^{-mk} X(k)$

证: 利用周期序列的移位特性:

利用 $\text{DFS}[x((n-m))_N] = \text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = w_N^{-mk} \tilde{X}(k)$

$$\therefore \text{DFT}[f(n)] = \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)]$$

$$= \text{DFT}[\tilde{x}(n+m) R_N(n)]$$

$$= w_N^{-mk} \text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] R_N(k) = w_N^{-mk} X(k)$$

实际上, 利用 W_N^{-mk} 的周期性, 将 $f(n) = x((n+m))_N R_N(n)$ 代入 DFT 定义式, 同样很容易证明。

同样, 对于频域有限长序列 $X(k)$ 的圆周移位, 有如下反变换特性

$$\text{IDFT}[X((k+1))_N R_N(k)] = W_N^{m1} x(n)$$

(3) 圆周卷积

若 $F(k) = X(k) Y(k)$

$$\text{则 } f(n) = \text{IDFT}[F(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y((n-k))_N R_N(n)$$

$$\text{或 } f(n) = \text{IDFT}[F(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} y(m) x((n-m))_N R_N(n)$$

证: 这个卷积可看作是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 与 $\tilde{y}(n)$ 卷积后再取其主值序列。将 $F(k)$ 周期延拓, 得 $\tilde{F}(k) = \tilde{X}(k) \tilde{Y}(k)$

$$\text{则根据 DFS 的周期卷积公式: } \tilde{f}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \tilde{y}(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x((m))_N y((n-m))_N$$

$$\text{因 } 0 \leq m \leq N-1 \text{ 时, } x((m))_N = x(m), \text{ 因此 } f(n) = \tilde{f}(n) R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) y((n-m))_N \right] R_N(n)$$

经过简单的换元可证明 $f(n) = \sum_{m=0}^{N-1} y(m) x((n-m))_N R_N(n)$

这一卷积过程与周期卷积是一样的, 只是在这里只取结果的主值序列。由于卷积过程只在主值区间 $0 \leq m \leq N-1$ 内进行, 所以, $y((n-m))_N$ 实际上就是 $y(m)$ 的圆周移位, 上面的卷积称为“圆周卷积”, 习惯上常用符号“ \otimes ”表示圆周卷积, 以区别于线性卷积。

$$F(k) = \text{DFT}[f(n)] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) Y((k-l))_N R_N(k)$$

同样，若 $f(n) = x(n)y(n)$ 则

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} Y(l) X((k-l))_N R_N(k)$$

所以，离散时间序列（或离散傅立叶变换）的圆周卷积与离散傅立叶变换（或离散时间序列）的乘积相对应。这就说明圆周卷积的运算可利用离散傅立叶变换转换成乘积实现。（傅立叶变换的应用）

(4) 有限长序列的线性卷积与圆周卷积（圆周卷积的应用）

有限长序列的线性卷积等于圆周卷积，而不产生混淆的必要条件是延拓周期 $L \geq N+M-1$ ，其中 N 、 M 为两个有限长序列的长度。

问题的产生：

实际应用中，大多数是求解线性卷积，如信号 $x(n)$ 通过系统 $h(n)$ ，其输出就是线性卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。而圆周卷积比起线性卷积，在运算速度上有很大的优越性，它可以采用离散傅立叶变换的乘积实现，而快速付里叶变换（FFT）技术又大大提高了离散傅立叶变换的计算速度，所以若能利用圆周卷积求线性卷积，会带来很大的方便。

问题：如果 $x(n)$ 和 $h(n)$ 为有限长序列，在什么条件下， $x(n)$ 与 $h(n)$ 的线性卷积能用圆周卷积代替而不产生失真？

分析：

假定 $x(n)$ 为有限长序列，长度为 N

$y(n)$ 为有限长序列，长度为 M

它们的线性卷积 $f(n) = x(n) * y(n)$ 也应是有限长序列，

$$f(n) = x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$$

对于 $x(m)$ ，其非零区间为 $0 \leq m \leq N-1$ ，对于 $y(n-m)$ 其非零区间为 $0 \leq n-m \leq M-1$ 。这两个不等式相加，得： $0 \leq n \leq N+M-2$ ，在这区间以外不是 $x(m) = 0$ ，就是 $y(n-m) = 0$ ，因而 $f(n) = 0$ 。因此 $f(n)$ 是一个长度为 $N+M-1$ 的有限长序列。

再看圆周卷积，重新构造两个序列 $x(n)$ 、 $y(n)$ ，均为长度为 $L \geq \max\{N, M\}$ 的有限长序列，在这两个 L 长序列中， $x(n)$ 只有前 N 个是非零值，后 $L-N$ 个为补充的零值，同样， $y(n)$ 只有前 M 个是非零值，后 $L-M$ 个为补充的零值。为了分析 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的圆周卷积，先看 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的周期延拓：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n+qL) \quad \tilde{y}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y(n+rL)$$

它们的周期卷积为 $\tilde{f}_L(n) = \sum_{m=-\infty}^{L-1} \tilde{x}(m)\tilde{y}(n-m) = \sum_{m=0}^{L-1} x(m)y(n-m)$

$$= \sum_{m=0}^{L-1} x(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} y(n+rL-m) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x(m)y(n+rL-m) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n+rL)$$

其中 $f(n)$ 就是线性卷积，也就是说， $x(n)$ 、 $y(n)$ 周期延拓后的周期卷积是 $x(n)$ 、 $y(n)$ 线性卷积的周期延拓，周期为 L 。

根据前面的分析， $f(n)$ 具有 $N+M-1$ 个非零序列值，因此，如果周期卷积的周期 $L < N+M-1$ ，那么 $f(n)$ 周期延拓后，必然有一部分非零序列值要重叠，出现混淆现象，只有 $L \geq N+M-1$ 时，才不会产生交叠，这时 $f(n)$ 的周期延拓 $\tilde{f}_L(n)$ 中每一个周期 L 内，前 $N+M-1$ 个序列值是 $f(n)$ 的全部非零序列值，而剩下的 $L - (N+M-1)$ 点上的序列则是补充的零值。而圆周卷积正是周期卷积取主值序列：

$$f_L(n) = x(n) \otimes y(n) = \tilde{f}_L(n) R_L(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n+rL) \right] R_L(n)$$

所以使圆周卷积等于线性卷积而不产生混淆的必要条件是 $L \geq N+M-1$ 。

(5) 共轭对称性

设 $x^*(n)$ 为 $x(n)$ 的共轭复数序列，则 $\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k)$

证明： $\text{DFT}[x^*(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{kn} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-kn} \right]^*$ $0 \leq k \leq N-1$

由于 $W_N^{(N-k)n} = W_N^{nN} W_N^{-kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} W_N^{-kn} = e^{-j2\pi n} W_N^{-kn} = W_N^{-kn}$

因此 $\text{DFT}[x^*(n)] = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} \right]^* = X^*(N-k)$

值得说明的是, 当 $k=0$ 时, 应为 $X^*(N-0)=X^*(0)$, 因为按定义 $X(k)$ 只有 N 个值, 即 $0 \leq k \leq N-1$, 而 $X(N)$ 已超出主值之间, 但一般习惯于认为 $X(k)$ 是分布在 N 等分的圆周上, 它的末点就是它的起始点, 即 $X(N)=x(0)$, 因此仍采用习惯表示式 $DFT[x^*(n)] = X^*(N-k)$ 。

今后在所有对称特性讨论中, 凡遇到 $X(N)$ 均应理解为 $X(N)=x(0)$ 。

DFT 形式下的 Parseval 定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \quad \text{可利用圆周卷积和共轭对称特性证明之。}$$

显然, 当 $y(n) = x(n)$ 时, 即为有限长序列的能量 $\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$

复序列的实部与虚部的 DFT 变换: 以 $x_r(n)$ 和 $x_i(n)$ 表示序列 $x(n)$ 的实部与虚部, 则

$$X_r(k) = DFT[x_r(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \quad X_i(k) = DFT[jx_i(n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)]$$



证明

$$\text{显然 } X_r(k) + X_i(k) = X(k) \quad \begin{cases} x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] \\ jx_i(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] \end{cases}$$

以 $X_e(k)$ 和 $X_o(k)$ 表示实部与虚部序列的 DFT, 则

$$X_e(k) = DFT[x_r(n)] = \frac{1}{2} DFT[x(n) + x^*(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$$

$$X_o(k) = DFT[jx_i(n)] = \frac{1}{2} DFT[x(n) - x^*(n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)]$$

$X_e(k)$ 与 $X_o(k)$ 对称特性:

$$\text{因 } X_e^*(N-k) = \frac{1}{2}[X(N-k) + X^*(N-N+k)]^* = \frac{1}{2}[X^*(N-k) + X(k)]$$

故 $X_e(k) = X_e^*(N-k)$, 因此 $X_e(k)$ 具有共轭偶对称特性, 称 $X_e(k)$ 为 $X(k)$ 的共轭偶对称分量。

同样的方法可得到 $X_o(k) = -X_o^*(N-k)$, 即 $X_o(k)$ 具有共轭奇对称特性, 称 $X_o(k)$ 为 $X(k)$ 的共轭奇对称分量。

对于纯实数序列 $x(n)$, 即 $x(n) = x_r(n)$, $X(k)$ 只有共轭偶对称部分, 即 $X(k) = X_e(k)$, 所以, 实数序列的 DFT 满足共轭对称性, 利用这一特性, 只要知道一半数目的 $X(k)$, 就可得到另一半的 $X(k)$, 这一特点在 DFT 运算中可以加以利用, 以提高运算效率。

$X(k)$ 的实部、虚部与 $x(n)$ 的共轭偶部与共轭奇部的关系: 根据 $x(n)$ 与 $X(k)$ 的对称性, 同样可找到 $X(k)$ 的实部、虚部与 $x(n)$ 的共轭偶部与共轭奇部的关系。

分别以 $x_e(n)$ 及 $x_o(n)$ 表示序列 $x(n)$ 的圆周共轭偶部与圆周共轭奇部:

$$\begin{cases} x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \\ x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)] \end{cases}$$

同样应从圆周意义上理解 $x(N-0) = x(0)$ 。可以证明:

$$DFT[x_e(n)] = \text{Re}[X(k)] \quad DFT[x_o(n)] = j\text{Im}[X(k)]$$

(6) 选频性

对复指数函数 $x(t) = e^{jq\omega_0 t}$ 进行采样得复序列 $x(n)$

$$x(n) = e^{jq\omega_0 n} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

其中 q 为整数。当 $\omega_0 = 2\pi/N$ 时, $x(n) = e^{j2\pi qn/N}$, 其离散付里叶变换为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi qn/N} e^{-j2\pi kn/N} \quad X(k) = \begin{cases} N & k=q \\ 0 & k \neq q \end{cases}$$

可见, 当输入信号的频率为 $q\omega_0$ 时, $X(k)$ 的 N 个值中只有 $X(q) = N$, 其余皆为零, 如果输入信号为若干个不同频率的信号的组合, 经离散付里叶变换后, 不同的 k 上, $X(k)$ 将有一一对应的输出, 因此, 离散付里叶变换实质上对频率具有选择性。

(7) DFT 与 Z 变换

有限长序列可以进行 z 变换 $X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$ 。

比较 z 变换与 DFT 变换，可见，当 $z=w_N^{-k}$ 时，

$$X(z)|_{z=w_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w_N^{-kn} = DFT[x(n)] = X(k), \quad \text{即} \quad X(k) = X(z)|_{z=w_N^{-k}}$$

$z = w_N^{-k} = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}$ ， w_N^{-k} 是 z 平面单位圆上幅角为 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 的点，即将 z 平面上

变量	周期	分辨率
ω	2π	$\frac{2\pi}{N}$
Ω, f	Ω_s, f_s	$\frac{f_s}{N}$
k	N	

的单位圆 N 等分后的第 k 点，所以 X(k) 也就是 z 变换在单位圆上等距离的采样值，如图 2.4 所示。同样，X(k) 也可看作是序列付氏变换 $X(e^{j\omega})$ 的采样，采样间隔为 $\omega_s = 2\pi/N$ ， $X(k) = X(e^{j\omega_s k})$

小结：

第一章讨论的采样定律，采样定律告诉我们，一个频带有限的信号，可以对它进行时域采样而不丢失任何信息，现在 DFT 变换进一步告诉我们，对于时间有限的信号（有限长序列），也可以对其进行频域采样，而不丢失任何信息，这正反应了傅立叶变换中时域、频域的对称关系。但是它却有十分重要的意义，我们看到，由于时域上的采样，使我们能够采用数字技术来处理这些时域上的信号（序列），而 DFT 理论使得不仅在时域，在频域也可采用数字处理技术。

第三章 第三节内容：

3-3 快速傅里叶变换 (FFT)

- 按时间抽选 (DIT) 的基-2 FFT 算法
- 线性卷积与线性相关的 FFT 算法

学习要求：掌握 FFT 的基本思想和运算规律；能熟练运用 FFT 进行信号频谱分析。

快速付里叶变换 (FFT) 是计算 DFT 的一种快速有效方法。

从前面的讨论中看到，有限长序列在数字技术中占有很重要的地位。有限长序列的一个重要特点是其频域也可以离散化，即离散付里叶变换 (DFT)。

数字信号处理中 DFT 运算的用途：

- 在 FIR 滤波器设计中，经常要由 $h(n)$ 求 $H(k)$ ，或从 $H(k)$ 求 $h(n)$ ；
- 因为信号序列的 DFT 本身就是信号频谱的采样集，所以 DFT 可直接用于分析信号的频谱。频谱分析在数字信号处理中用途广泛：如通过语言信号的频谱分析实现语音通讯的频带压缩、声纳信号的频谱分析用以区分水面与水下目标、在各种测量仪器中，频谱分析用得更多，这些都需要 DFT 运算。

虽然频谱分析和 DFT 运算很重要，但在很长一段时间里，由于 DFT 运算复杂，并没有得到真正的运用，而频谱分析仍大多采用模拟信号滤波的方法解决，直到 1965 年首次提出 DFT 运算的一种快速算法以后，情况才发生了根本变化，人们开始认识到 DFT 运算的一些内在规律，从而很快地发展和完善了一套高速有效的运算方法——快速付里变换 (FFT) 算法，FFT 的出现，使 DFT 的运算大大简化，运算时间缩短一~二个数量级，使 DFT 的运算在实际中得到广泛应用。

3.3.1 按时间抽选 (DIT) 的基-2 FFT 算法



DFT 运算的特点

首先分析对有限长序列 $x(n)$ 进行一次 DFT 运算所需的运算量。

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w_N^{-kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

一般, $x(n)$ 和 w_N^{nk} 都是复数, 因此, 每计算一个 $X(k)$ 值, 要进行 N 次复数相乘, 和 $N-1$ 次复数相加, $X(k)$ 一共有 N 个点, 故完成全部 DFT 运算, 需要 N^2 次复数相乘和 $N(N-1)$ 次复数相加, 在这些运算中, 乘法比加法复杂, 需要的运算时间多, 尤其是复数相乘, 每个复数相乘包括 4 个实数相乘和 2 个实数相加, 每个复数相加包括 2 个实数相加, 例如

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \{ (R_e[x(n)]R_e[w_N^{nk}] - I_m[x(n)]I_m[w_N^{nk}]) + j(R_e[x(n)]I_m[w_N^{nk}] + I_m[x(n)]R_e[w_N^{nk}]) \}$$

所以, 每计算一个 $X(k)$ 要进行 $4N$ 次实数相乘和 $2N+2(N-1)=2(2N-1)$ 次实数相加, 因此, 整个 DFT 运算需要 $4N^2$ 实数相乘和 $2N(2N-1)$ 次实数相加。

从上面的分析看到, 在 DFT 计算中, 不论是乘法和加法, 运算量均与 N^2 成正比, 因此, N 较大时, 运算工作是十分可观, 例, 计算 $N=10$ 点的 DFT, 需要 100 次复数相乘, 而 $N=1024$ 点时, 需要 1048576 (一百多万) 次复数乘法, 如果信号要求实时处理, 则要求有很快的计算速度才能完成上述计算量。

反变换 IDFT 与 DFT 的运算结构相同, 只是多乘一个常数 $1/N$, 所以二者的计算量相同。

FFT 算法的基本思想:

仔细考察 DFT 与 IDFT 的运算发现, 利用以下两个特性可减少运算量:

1) 系数 $w_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$ 是一个周期函数, 它的周期性和对称性可利用来改进运算, 提高计算效率。

例 $w_N^{k(N-k)} = w_N^{k(N-k)} = w_N^{-k}$, 又如 $w_N^{N/2} = -1$, 因此 $w_N^{k(N/2)} = -w_N^k$

利用这些周期性和对称性, DFT 运算中有些项可合并;

2) 利用 w_N^{nk} 的周期性和对称性, 把长度为 N 点的大点数的 DFT 运算分解为若干个小点数的 DFT。因为 DFT 的计算量正比于 N^2 , N 小, 计算量也就小。

FFT 算法正是基于这样的基本思想发展起来的。它有多种形式, 但基本上可分为两类, 时间抽取法和频率抽取法。



按时间抽取的 FFT (N 点 DFT 运算的分解)

先从一个特殊情况开始, 假定 N 是 2 的整数次方, $N=2^M$, M : 正整数

将 N 点的 DFT 分解为两个 $N/2$ 点的 DFT:

首先将序列 $x(n)$ 分解为两组, 一组为偶数项, 一组为奇数项

$$\begin{cases} x(2r) = x_1(r) \\ x(2r+1) = x_2(r) \end{cases} \quad r=0, 1, \dots, N/2-1$$

将 DFT 运算也相应分为两组: $X(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)w_N^{2rk} + w_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)w_N^{2rk}$

$$= X_1(k) + w_N^k X_2(k)$$

(1)

其中 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 分别是 $x_1(r)$ 和 $x_2(r)$ 的 $N/2$ 点 DFT。



$$\begin{aligned} X(k) &= DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)w_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)w_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)w_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)w_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)w_N^{2rk} + w_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)w_N^{2rk} \end{aligned}$$

因为 $w_N^{2n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2n} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}n} = w_{N/2}^n$

故 $X(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)w_N^{rk} + w_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)w_{N/2}^{rk} = X_1(k) + w_N^k X_2(k)$

其中 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 分别是 $x_1(r)$ 和 $x_2(r)$ 的 $N/2$ 点 DFT:

$$X_1(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)w_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)w_{N/2}^{rk}$$

$$X_2(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)w_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)w_{N/2}^{rk}$$

可见，一个 N 点的 DFT 可以分解为两个 $N/2$ 点的 DFT，这两个 $N/2$ 点的 DFT 再按照上面 (1) 式合成为一个 N 点 DFT，注意到， $X_1(k)$ ， $X_2(k)$ 有 $N/2$ 个点，即 $k=0, 1, \dots, N/2-1$ ，由 (1) 式得到 $X(k)$ 只有 $N/2$ 点，而实际上 $X(k)$ 有 N 个点，即 $k=0, 1, \dots, N-1$ ，要用 $X_1(k)$ ， $X_2(k)$ 表示全部 $X(k)$ 值，还必须应用系数 w 的周期性和对称性。

$X(k)$ 的 $(N/2) \sim N-1$ 点表示:

由 $X(k) = X_1(k) + w_N^k X_2(k)$ ， $k=0, 1, 2, \dots, N/2-1$ (2a)

得: $X(\frac{N}{2}+k) = X_1(\frac{N}{2}+k) + w_N^{\frac{N}{2}+k} X_2(\frac{N}{2}+k)$ 因为 $w_N^{r(\frac{N}{2}+k)} = w_{N/2}^{rk}$,

且 $X_1(\frac{N}{2}+k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)w_{N/2}^{r(\frac{N}{2}+k)} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)w_{N/2}^{rk} = X_1(k)$

同样 $X_2(\frac{N}{2}+k) = X_2(k)$ 。 考虑到 w_N^k 对称性: $w_N^{\frac{N}{2}+k} = w_{N/2}^k \cdot w_N^k = -w_N^k$ 。

故 $X(\frac{N}{2}+k) = X_1(k) - w_N^k X_2(k)$ ， $k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$ (2b)

(2a) 式表示了 $X(k)$ 前半部分 $k=0 \sim N/2-1$ 时的组成方式，(2b) 式则表示了后半部分 $k=N/2 \sim N-1$ 时的组成方式。这两式所表示的运算过程可用一个称作蝶形的信号流图来表示。

蝶形信号流图:

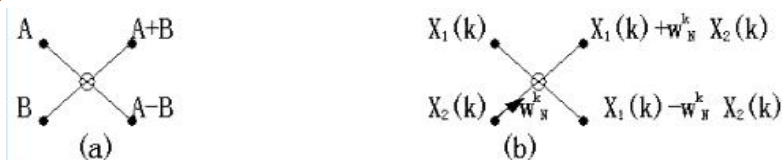


图1、蝶形运算流图符号

如图 1 (a) 所示，图中左面两支为输入，中间以一个小圆圈表示加、减运算，右上支为相加输出，右下支为相减输出，如果在某一支路上信号需要进行乘法运算，则在该支路上标以箭头，并将相乘的系数标在箭头边，这样 (2a)，(2b) 所表示的运算，可用图 1 (b) 所表示的“蝶形结”来表示。采用这种表示法，可将以上以讨论的分解过程用计算流图来表示。

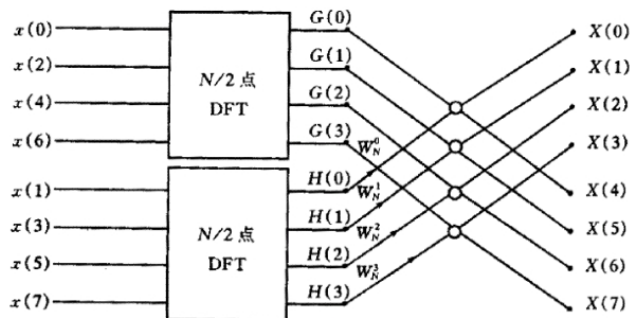


图2.6、 N 点DFT分解为2个 $N/2$ 点DFT ($N=8$)

图 2.6 所示为 $N=2^3=8$ 的例子。通过这样分解以后，每一个 $N/2$ 点 DFT 只需要 $(N/2)^2 = N^2/4$ 次复数乘法运算，两个 $N/2$ 点的 DFT 需要 $2(N/2)^2 = N^2/2$ 次复乘，再加上将两个 $N/2$ 点 DFT 合成为 N 点 DFT 时，在蝶形结前的 $N/2$ 次复乘，共需要 $(N/2)^2 + N/2 \approx N^2/2$ 次复乘，由此可见，经过这样的分解处理，运算量差不多节省了一倍。

将 $N/2$ 点的 DFT 分解为两个 $N/4$ 点的 DFT:

既然这样分解是有效的，由于 $N=2^M$ ， $N/2$ 仍然是偶数，因此可对两个 $N/2$ 点的 DFT 再分别作进一步分解，例如对 $x_1(r)$ 和 $x_2(r)$ 可以再按其偶数部分及奇数部分分解为两个 $N/4$ 点的 DFT，

$$\begin{cases} x_1(2l) = x_3(l) \\ x_1(2l+1) = x_4(l) \end{cases} \quad l=0, 1, \dots, N/4-1$$

$$X_1(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l)w_{N/2}^{kl} + \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l+1)w_{N/2}^{(2l+1)k}$$

而 $X_1(k + \frac{N}{4}) = X_3(k) - w_{N/2}^k X_4(k)$

同样 $X_2(k)$ 也可这样分解，并且将系数统一为 $w_{N/2}^k - w_{N/2}^{k+N/4}$ ，这样一个 8 点 DFT 就可分解为四个 2 点的 DFT，如图 2.7 所示。

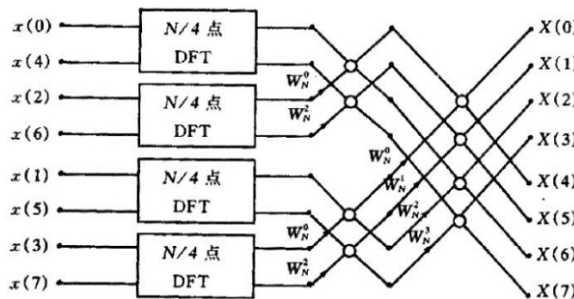


图 2.7、N 点 DFT 分解为 4 个 $N/4$ 点 DFT ($N=8$)

2 点 DFT 的表示:

最后剩下的是 2 点 DFT，它可以用一个蝶形结表示，例如， $x(0)$ ， $x(4)$ 所组成的 2 点 DFT 就可表示式:

$$X_3(0) = x(0) + W_2^0 x(4) = x(0) + W_N^0 x(4)$$

$$X_3(1) = x(0) - W_2^0 x(4) = x(0) - W_N^0 x(4)$$

这样，一个 8 点的完整的按时间抽取运算的流图如图 2.8 所示。

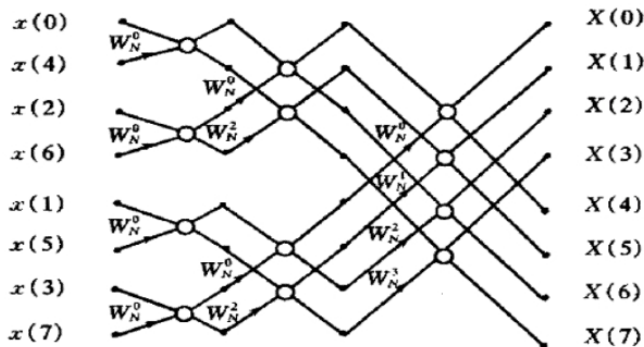


图 2.8、 $N=8$ 的按时间抽取法 FFT 计算流图

由于这种方法每一步分解都是按输入时间序列是属于偶数还是奇数来抽取的，所以称为“按时间抽取法”或“时间抽取法”。

时间抽取法 FFT 的运算特点:

(1) 蝶形运算

对于任何一个 2 的整数幂 $N=2^M$ ，总是可以通过 M 次分解最后完全成为 2 点的 DFT 运算。这样的 M 次分解，就构成从 $x(n)$ 到 $X(k)$ 的 M 级运算过程。从上面的流图可看到，每一级运算都由

N/2 个蝶形运算构成。因此每一级运算都需要 (1/2) 次复乘和 N 次复加(每个结作加、减各一次)，这样，经过时间抽取后 M 级运算总共需要的运算：

$$\text{复乘 } \frac{N}{2} \cdot M = \frac{N}{2} \log_2 N \qquad \text{复加 } N \cdot M = N \log_2 N$$

当然，实际运算量与这个数字稍有出入，因为 $W_N^0, W_N^2, W_N^4, W_N^6$ 这几个系数实际上都不用乘法运算，因此上面 N=8 的例子中，实际上只有两个系数 W_N^1 及 W_N^3 是需要乘法运算的。

用时间抽取法所需的计算量，不论是复乘还是复加都与 $N \log_2 N$ 成正比，而直接运算时则与 N^2 成正比。例 N=2048, $N^2=4194304$, $(N/2) \log_2 N=11264$, $N^2 / [(N/2) \log_2 N]=392.4$ 倍。FFT 显然要比直接法快得多。

(2) 原位计算

当数据输入到存储器中以后，每一级运算的结果仍然储存在同一组存储器中，直到最后输出，中间无需其它存储器，这叫原位计算。

例如，N=8 的 FFT 运算，输入 $x(0), x(4), x(2), x(6) \dots, x(7)$ 可分别存入 A(1), A(2), ..., A(8) 这 8 个存储单元中，在第一级运算中，首先是存储单元 A(1), A(2) 中 $x(0), x(4)$ 进入蝶形运算， $x(0), x(4)$ 输入运算器后，其数值不再需要保存，因此蝶形运算的结果可仍然送回存储单元 A(1), A(2) 中保存，然后 A(3), A(4) 中 $x(2), x(6)$ 再进入蝶形运算，其结果再送回 A(3), A(4)，一直到算完 A(7), A(8)，则完成了第一级运算过程。第二级运算仍可采用这种原位的方式，但是进入蝶形结的组合关系不同，首先进入蝶形结的是 A(1)、A(3) 存储单元中的数据，运算结果仍可送回 A(1)、A(3) 保存，然后进入蝶形结的是 A(2)、A(4) ...，依此类推，每一级运算均可在原位进行，这种原位运算结构可节省存储单元，降低设备成本，还可节省找地址的时间。

(3) 序数重排

对按时间抽取 FFT 的原位运算结构，当运算完毕时，这种结构存储单元 A(1)、A(2), ..., A(8) 中正好顺序存放着 $X(0), X(1), X(2), \dots, X(7)$ ，因此可直接按顺序输出，但这种原位运算的输入 $x(n)$ 却不能按这种自然顺序存入存储单元中，而是按 $X(0), X(4), X(2), X(6), \dots, X(7)$ 的顺序存入存储单元，这种顺序看起来相当杂乱，然而它也是有规律的。当用二进制表示这个顺序时，它正好是“码位倒置”的顺序。例如，原来的自然顺序应是 $x(1)$ 的地方，现在放着 $x(4)$ ，用二进制码表示这一规律时，则是在 $x(001)$ 处放着 $x(100)$ ， $x(011)$ 处放着 $x(110)$ 。即将自然顺序的二进制码位倒置过来，第一位码变成最末位码，这样倒置以后的顺序正是输入所需要的顺序。下表列出 N=8 时按码位倒置规律所得的顺序，其结果与按时间抽取 FFT 流图中的输入顺序是一致的。

表 码位倒置顺序

自然顺序	二进制表示	码位倒置	码位倒置顺序
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	010	3
7	111	111	7

在实际运算中，一般直接将输入数据 $x(n)$ 按码位倒置的顺序排好输入很不方便，总是先按自然顺序输入存储单元，然后再通过变址运算将自然顺序的存储转换成码位倒置顺序的存储，然后进行 FFT 的原位计算。目前有许多通用 DSP 芯片支持这种码位倒置的寻址功能。

(4) 蝶形类型随迭代次数成倍增加

观察 8 点 FFT 的三次迭代运算

第一级迭代，只有一种类型的蝶形运算系数 W_8^0

第二级迭代，有二种类型的蝶形运算系数 W_8^0, W_8^2 ，参加运算的两个数据点间隔为 2。

第三级迭代，有四类蝶形运算系数 $W_8^0, W_8^1, W_8^2, W_8^3$ ，参加运算的两个数据点间隔为 4。

所以，每次迭代的蝶形类型比上一次蝶代增加一倍，数据点间隔也增大一倍。

第三章 第四节内容:

3-4 FFT 应用



1 用 FFT 估计信号的频谱

在离散付里叶变换一节, 我们讲到, 离散付里叶变换 $X(k)$ 可看成是 z 变换在单位圆上的等距离采样 $X(k) = X(z)|_{z=e^{j\omega_k}}$

同样, $X(k)$ 也可看作是序列付氏变换 $X(e^{j\omega})$ 的采样, 采样间隔为 $\omega_k = 2\pi/N$ $X(k) = X(e^{j\omega_k})$

由此看出, 离散付里叶变换实质上是其频谱的离散频域采样, 对频率具有选择性 ($\omega_k = 2\pi k/N$), 在这些点上反映了信号的频谱。

我们知道, 采样定律说明一个频带有限的信号, 可以对它进行时域采样而不丢失任何信息, DFT 变换则说明对于时间有限的信号 (有限长序列), 也可以对其进行频域采样, 而不丢失任何信息。所以只要时间序列足够长, 采样足够密, 频域采样也就可较好地反映信号的频谱趋势, 所以 FFT 可以用以进行连续信号的频谱分析。

当然, 这里作了几次近似处理:

1) 用离散采样信号的傅立叶变换来代替连续信号的频谱, 只有在严格满足采样定理的前提下, 频谱才不会有畸变, 否则只是近似;

2) 用有限长序列来代替无限长离散采样信号。



2 实数序列的 FFT

以上讨论的 FFT 算法都是复数运算, 包括序列 $x(n)$ 也认为是复数, 但大多数场合, 信号是实数序列, 任何实数都可看成虚部为零的复数, 例如, 求某实信号 $y(n)$ 的复谱, 可认为是将实信号加上数值为零的虚部变成复信号 ($x(n) + j0$), 再用 FFT 求其离散付里叶变换。这种作法很不经济, 因为把实序列变成复序列, 存储器要增加一倍, 且计算机运行时, 即使虚部为零, 也要进行涉及虚部的运算, 浪费了运算量。合理的解决方法是利用复数据 FFT 对实数据进行有效计算, 下面介绍两种方法。

(1) 一个 N 点 FFT 同时计算两个 N 点实序列的 DFT

设 $x_1(n), x_2(n)$ 是彼此独立的两个 N 点实序列, 且 $X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$, $X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$

可通过一次 FFT 运算同时获得 $X_1(k), X_2(k)$ 。算法如下:

首先将 $x_1(n), x_2(n)$ 分别当作一复序列的实部及虚部, 令

$$x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

通过 FFT 运算可获得 $x(n)$ 的 DFT 值 $X(k) = \text{DFT}[x_1(n)] + j\text{DFT}[x_2(n)] = X_1(k) + jX_2(k)$

利用离散付里叶变换的共轭对称性

$$\begin{cases} X_1(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \\ X_2(k) = -\frac{j}{2}[X(k) - X^*(N-k)] \end{cases}$$

有了 $x(n)$ 的 FFT 运算结果 $X(k)$, 由上式即可得到 $X_1(k), X_2(k)$ 的值。

(2) 用一个 N 点的 FFT 运算获得一个 $2N$ 点实序列的 DFT

设 $x(n)$ 是 $2N$ 点的实序列, 现人为地将 $x(n)$ 分为偶数组 $x_1(n)$ 和奇数组 $x_2(n)$

$$x_1(n) = x(2n) \quad n=0, 1, \dots, N-1$$

$$x_2(n) = x(2n+1) \quad n=0, 1, \dots, N-1$$

然后将 $x_1(n)$ 及 $x_2(n)$ 组成一个复序列 $y(n) = x_1(n) + jx_2(n)$

通过 N 点 FFT 运算可得到 $Y(k) = X_1(k) + jX_2(k)$

根据前面的讨论, 得到

$$\begin{cases} X_1(k) = \frac{1}{2}[Y(k) + Y^*(N-k)] \\ X_2(k) = -\frac{j}{2}[Y(k) - Y^*(N-k)] \end{cases}$$

为求 $2N$ 点 $x(n)$ 所对应的 $X(k)$, 需求出 $X(k)$ 与 $X_1(k), X_2(k)$ 的关系

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(2n)W_{2N}^{2kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x(2n+1)W_{2N}^{(2n+1)k}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(2n)W_N^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N-1} x(2n+1)W_N^{kn}$$

而

$$\begin{cases} X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(2n)W_N^{kn} \\ X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(2n+1)W_N^{kn} \end{cases}$$

所以 $X(k) = X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k)$ 。

这样，由 $x_1(n)$ 及 $x_2(n)$ 组成复序列，经 FFT 运算求得 $Y(k)$ 后，再利用共轭对称性求出 $X_1(k), X_2(k)$ ，最后利用上式求出 $X(k)$ ，从而达到了用一个 N 点的 FFT 计算一个 $2N$ 点实序列 DFT 的目的。



用 FFT 计算相关函数

相关概念很重要，互相关运算广泛应用于信号分析与统计分析，如通过相关函数峰值的检测测量两个信号的时延差等。

两个长为 N 的实离散时间序列 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的互相关函数定义为

$$r_{xy}(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n-\tau)y(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n+\tau)$$

则可以证明， $r_{xy}(\tau)$ 的离散付里叶变换为

$$R_{xy}(k) = X^*(k)Y(k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

其中 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, $R_{xy}(k) = \text{DFT}[r_{xy}(\tau)]$

证：将 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的逆离散付里叶变换代入互相关函数定义式

$$r_{xy}(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n+\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} Y(l)e^{j\frac{2\pi}{N}l(n+\tau)}$$

因 $x(n)$ 是实序列，所以 $x(n) = x^*(n)$ ，得

$$r_{xy}(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] \left[\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} Y(l)e^{j\frac{2\pi}{N}l(n+\tau)} \right]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X^*(k)Y(l)e^{j\frac{2\pi}{N}lk} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(l-k)} \right]$$

$$\text{因 } \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(l-k)} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}N(l-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(l-k)}} = \begin{cases} 1 & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases}$$

$$\text{得 } r_{xy}(\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n)y(n+\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)Y(k)e^{j\frac{2\pi}{N}k\tau}$$

证毕。

当 $x(n)=y(n)$ 时，得到 $x(n)$ 的自相关函数为： $r_{xx}(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 e^{j\frac{2\pi}{N}k\tau}$

上面的推导表明，互相关和自相关函数的计算可利用 FFT 实现。由于离散付里叶变换隐含着周期性，所以用 FFT 计算离散相关函数也是对周期序列而言的。直接做 N 点 FFT 相当于对两个 N 点序列 $x(n)$ 、 $y(n)$ 作周期延拓，作相关后再取主值（类似圆周卷积）。而实际一般要求的是两个有限长序列的线性相关，为避免混淆，需采用与圆周卷积求线性卷积相类似的方法，先将序列延长补 0 后再用上述方法。

利用 FFT 求两个有限长序列线性相关的步骤：

设 $x(n)$ 长为 N_1 ， $y(n)$ 长为 N_2 ，求线性相关。

(1) 为了使两个有限长序列的线性相关可用其圆周相关代替而不产生混淆，选择周期 $N \geq N_1+N_2-1$ ，且 $N=2^m$ ，以便使用 FFT，将 $x(n)$ 、 $y(n)$ 补零至长为 N 。即：

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & n = 0, 1, \dots, N_1-1 \\ 0 & n = N_1, N_1+1, \dots, N-1 \end{cases} \quad y(n) = \begin{cases} y(n) & n = 0, 1, \dots, N_2-1 \\ 0 & n = N_2, N_2+1, \dots, N-1 \end{cases}$$

(2) 用 FFT 计算 $X(k)$ 、 $Y(k)$ ($k=0, 1, \dots, N-1$)

(3) $R(k) = X^*(k)Y(k)$

(4) 对 $R(k)$ 作 IFFT，得到 $r(n)$ ($n=0, 1, \dots, N-1$)



线性卷积的 FFT 算法

线性卷积是求离散系统响应的主要方法之一,许多重要应用都建立在这一理论上,如卷积滤波等。以前曾讨论了用圆周卷积计算线性卷积的方法归纳如下:

将长为 N_2 的序列 $x(n)$ 延长到 L , 补 $L-N_2$ 个零

将长为 N_1 的序列 $h(n)$ 延长到 L , 补 $L-N_1$ 个零

如果 $L \geq N_1+N_2-1$, 则圆周卷积与线性卷积相等, 此时, 可有 FFT 计算线性卷积, 方法如下:

a. 计算 $X(k)=\text{FFT}[x(n)]$

b. 求 $H(k)=\text{FFT}[h(n)]$

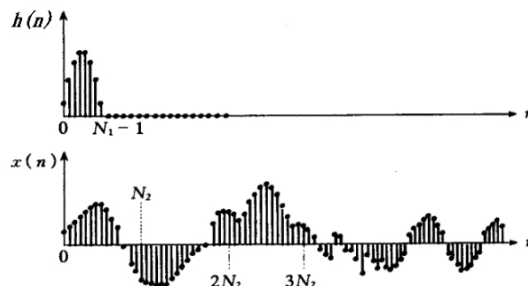
c. 求 $Y(k)=H(k)X(k)$ $k=0 \sim L-1$

d. 求 $y(n)=\text{IFFT}[Y(k)]$ $n=0 \sim L-1$

可见, 只要进行二次 FFT, 一次 IFFT 就可完成线性卷积计算。计算表明, $L > 32$ 时, 上述计算线性卷积的方法比直接计算线卷积有明显的优越性, 因此, 也称上述圆周卷积方法为**快速卷积法**。

上述结论适用于 $x(n), h(n)$ 两序列长度比较接近或相等的情况, 如果 $x(n), h(n)$ 长度相差较多, 例如, $h(n)$ 为某滤波器的单位脉冲响应, 长度有限, 用来处理一个很长的输入信号 $x(n)$, 或者处理一个连续不断的信号, 按上述方法, $h(n)$ 要补许多零再进行计算, 计算量有很大的浪费, 或者根本不能实现。为了保持快速卷积法的优越性, 可将 $x(n)$ 分为许多段后处理, 每小段的长与 $h(n)$ 接近, 其处理方法有两种:

(1) **重叠相加法**——由分段卷积的各段相加构成总的卷积输出



假定 $x_i(n)$ 表示图中

图、长序列分段滤波

$$x_i(n) = \begin{cases} x(n) & iN_2 \leq n \leq (i+1)N_2 - 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则输入序列可表为: $x(n) = \sum x_i(n)$

于是输出可分解为: $y(n) = x(n) * h(n) = \sum x_i(n) * h(n) = \sum y_i(n)$

其中 $y_i(n) = x_i(n) * h(n)$

由此表明, 只要将 $x(n)$ 的每一段分别与 $h(n)$ 卷积, 然后再将这些卷积结果相加起来就可得到输出序列, 这样, 每一段的卷积都可用上面讨论的快速卷积来计算。先对 $h(n)$ 及 $x_i(n)$ 补零, 补到具有 N 点长度, $N=N_1+N_2-1$ 。一般选择 $N=2^M$, 然后用基 2 FFT 算法通过正反变换计算

$$y_i(n) = x_i(n) * h(n)$$

由于 $y_i(n)$ 的长度为 N , 而 $x_i(n)$ 的长度为 N_2 , 因此相邻两 $y_i(n)$ 序列必然有 $N-N_2=N_1-1$ 点发生重叠, 这个重叠部分应该相加起来才能构成最后的输出序列。

计算步骤:

a. 事先准备好滤波器参数

$$H(k) = \text{DFT}[h(n)], N \text{ 点}$$

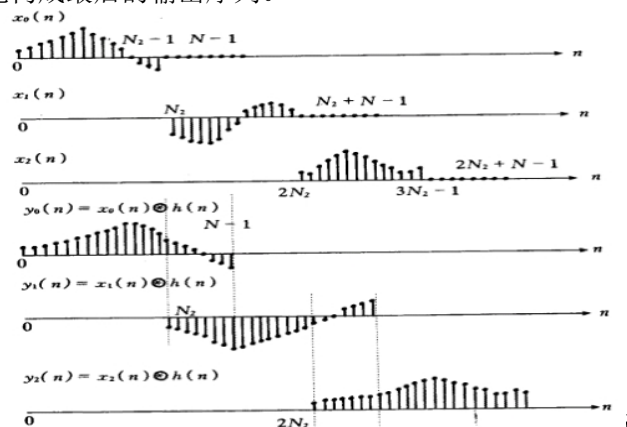
b. 用 N 点 FFT 计算 $X_i(k) = \text{DFT}[x_i(n)]$

$$Y_i(k) = X_i(k)H(k)$$

d. 用 N 点 IFFT 求 $y_i(n) = \text{IDFT}[Y_i(k)]$

e. 将重叠部分相加

$$y(n) = \sum y_i(n)$$



图、重叠相加法

(2) 重叠保存法

这种方法和第一种方法稍有不同，即将上面分图序列中补零的部分不是补零，而是保留原来的输入序列值，且保留在各段的前端，这时，如利用 DFT 实现 $h(n)$ 和 $x_i(n)$ 的圆周卷积，则每段卷积结果的前 N_1-1 个点不等于线性卷积值需舍去。

为了清楚地看出这点，研究一下 $x(n)$ 中一段长为 N 的序列 $x_i(n)$ 与 $h(n)$ (长为 N_1) 的圆周卷积情况：

$$y_i(n) = x_i(n) \otimes h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_i(m)h((n-m))_N R_W(n)$$

由于 $h(n)$ 的长度为 N_1 ，当 $0 \leq n \leq N_1-2$ 时， $h((n-m))_N$ 将在 $x_i(m)$ 的尾部出现有非零值，如图 $n=1$ 的情况就是如此，所以 $0 \leq n \leq N_1-2$ 这部分 $y_i(n)$ 值中将混入 $x_i(m)$ 尾部与 $h((n-m))_N$ 的卷积值，从而使 $y_i(n)$ 不同于线性卷积结果，但当 $n=N_1-1 \sim N-1$ 时，则有 $h((n-m))_N = h(n-m)$ ，因此从 $n=N_1-1$ 点开始圆周卷积值完全与线性卷积值一样， $y_i(n)$ 的后面 N_2 点才是正确的卷积值，而每一段卷积运算结果的前 N_1-1 点值需去掉。

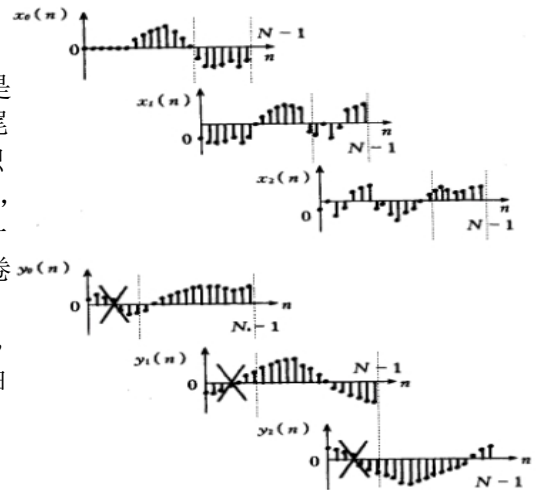
为了不造成输出信号遗漏，对 $x(n)$ 分段时，需使相邻两段有 N_1-1 个点重叠（对于第一段， $x(n)$ 由于没有前一段保留信号，在其前填补 N_1-1 点零点）。为此将 $x_i(n)$ 定义为

$$x_i(n) = \begin{cases} x(n+iN_2 - N_1 + 1) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

每段和 $h(n)$ 的圆周卷积以 $y_i(n)$ 表示， $y_i(n) = x_i(n) \otimes h(n)$ ，由 FFT 算出，去掉 $y_i(n)$ 的前 N_1-1 点，再把相邻各段输出顺次连接起来就构成了最终的输出序列 $y(n)$ 。

重叠保留法每一输入段均由 $N-N_1+1 = N_2$ 个新点和前一段保留下来的 N_1-1 个点所组成。值得注意的是，对于有限长时间序列 $x(n)$ (长度为 $L = M \cdot N_2$)，在结束段 ($i=M-1$) 做完后，我们所得到的只是 L 点的线性卷积，还少了 N_1-1 点，实际上就是 $h(-n)$ 移出 $x(n)$ 尾部时的不完全重合点，或者说是最后一段的重叠部分 N_1-1 少做了一次卷积，为此，因再补做这一段 N_1-1 点，在其后填补 N_2 点零点保证长度仍为 N 点，一样舍去前取 N_1-1 点，并从 N_1-1 点开始，保留 N_1-1 点。

重叠保留法与重叠相加法的计算量差不多，但省去了重叠相加法最后的相加运算。一般来说，用 FFT 作信号滤波，只用于 FIR 滤波器阶数 $h(n)$ 大于 32 的情况下，且取 $N_2 = (5 \sim 10) N_1$ ，这样可接近于最高效的运算。



图、重叠保留过程

5

DFT 应用中的一些问题

(1) 混迭

对连续信号 $x(t)$ 进行数字处理前，要进行采样 $x(nT) = x(t) \sum \delta(t-nT)$ 。采样序列的频谱是连续信号频谱的周期延拓，周期为 f_s ，如采样率过低，不满足采样定理， $f_s < 2f_b$ ，则导致频谱混迭，使一个周期内的谱对原信号谱产生失真，无法恢复原信号，进一步的数字处理失去依据。

(2) 泄漏

处理实际信号序列 $x(n)$ 时，一般总要将它截断为一有限长序列，长为 N 点，相当于乘以一个矩形窗 $w(n) = R_N(n)$ 。对于矩形窗函数，其频谱是一个抽样函数形式，有主瓣，也有许多副瓣，窗口越大，主瓣越窄，当窗口趋于无穷大时，就是一个冲击。我们知道，时域的乘积对应频域的卷积，所以，加窗后的频谱实际是原信号频谱与矩形窗函数频谱（抽样函数）的卷积，卷积的结果使频谱延伸到了主瓣以外，且一直延伸到无穷。当窗口无穷大时，与冲击的卷积就是其本身，无畸变，否则就有畸变。例如信号为 $e^{j\omega_0 nT}$ ，是一单线谱，但当加窗后，线谱与

抽样函数进行卷积，原来在 Ω_0 处的一根谱线变成了以 Ω_0 为中心的，形状为抽样函数的谱线序列，原来在一个周期 (Ω_s) 内只有一个频率上有非零值，而现在一个周期内几乎所有频率上都有非零值，从能量守恒看，相当于 $x(e^{j\Omega T})$ 的频率成份从 Ω_0 处“泄漏”到其它频率处去了。

考虑各采样频率周期内频谱“泄漏”后的互相串漏，泄漏还会引起频谱的混迭。

(3) 栅栏效应

N 点 DFT 是在频率区间 $[0, 2\pi]$ 上对信号频谱进行 N 点等间隔采样，得到的是若干个离散的频谱点 $X(k)$ ，且它们限制在基频的整数倍上，这就好像在栅栏的一边通过缝隙看另一边的景象一样，只能在离散点处看到真实的景象，其余部分频谱成分被遮挡，所以称之为栅栏效应。减小栅栏效应方法：尾部补零，使谱线变密，增加频域采样点数，原来漏掉的某些频谱分就可能被检测出来。

第四章 无限长单位冲激响应(IIR)滤波器的设计

- 常用模拟低通滤波器特性
- 用模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器（冲激响应不变法、双线性变换法）
- 设计 IIR 滤波器的频率变换法

学习要求：掌握常用模拟低通滤波器特性；会用冲激响应不变法、双线性变换法设计 IIR 滤波器，熟练掌握设计 IIR 滤波器的频率变换法。

 (数字滤波器的数学描述, 分类, 设计步骤)

数字滤波器是数字信号处理中使用得最广泛的一种线性系统环节，是数字信号处理的重要基础。数字滤波器的本质是将一组输入的数字序列通过一定的运算后转变为另一组输出的数字序列。

 **数字滤波器的数学描述：**

差分方程	系统函数
$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i y(n-i)$	$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - d_i z^{-1})} \quad \text{一般 } M \leq N$

 **分类：**

- 1) 按计算方法分类：递归系统，非递归系统
- 2) 按冲击响应长度分类：IIR，FIR

3) 按频带分类：低通，高通，带通，带阻



设计步骤:

- 1) 按照实际需要确定滤波器的性能要求;
- 2) 用一个因果稳定的系统函数(传递函数)去逼近这个性能要求, 这种传递函数可分为两类: IIR 和 FIR。
- 3) 用一个有限精度的运算去实现这个传递函数。包括选择运算结构: 如级联型、并联型、卷积型、频率采样型以及快速卷积(FFT)型等, 及选择合适的字长和有效的数字处理方法等。



设计方法:



最优化设计方法

一个 N 阶 IIR 滤波器的传递函数可表示为
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}} = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^M (1 - d_i z^{-1})}$$

传递函数的设计就是确定系数 a_i 、 b_i 或零、极点 c_i 、 d_i , 以使滤波器满足给定的性能要求。设计方法一般有两种:

1. 利用模拟滤波器的理论来设计数字滤波器

先设计一个合适的模拟滤波器, 然后变换成满足预定指标的数字滤波器。由于模拟的网络综合理论已经发展得很成熟, 已经产生了许多高效率的设计方法。很多常用的模拟滤波器不仅有简单而严格的设计公式, 而且设计参数已表格化, 设计起来方便、准确, 因此可将这些理论继承下来, 作为设计数字滤波器的工具。

2. 最优化设计方法

分两步:

- 1) 确定一种最优准则, 如最小均方误差准则, 使设计出的实际频率响应的幅度特性 $|H(e^{j\omega})|$ 与所要求的理想频率响应 $|H_d(e^{j\omega})|$ 的均方误差最小,
$$\varepsilon = \sum_{j=1}^M \left| |H(e^{j\omega_j})| - |H_d(e^{j\omega_j})| \right|^2 = \min$$

此外还有其他多种误差最小准则。

- 2) 在此最佳准则下, 通过迭代运算求滤波器的系数 a_i 、 b_i 。

因为数字滤波器在很多场合所要完成的任务与模拟滤波器相同, 如作低通、高通、带通及带阻网络等, 这时数字滤波也可看作是“模仿”模拟滤波。因此第一种方法用得较为普遍, 如 IIR 滤波器的设计。但随着计算机技术的发展, 最优化设计方法的使用逐渐增多。

第四章 第一节内容:

4-1 常用模拟低通滤波器特性



振幅平方函数

为了方便学习数字滤波器, 先讨论几种常用的模拟低通滤波器设计方法, 高通、带通、带阻等模拟滤波器可利用变量变换方法, 由低通滤波器变换得到。

模拟滤波器的设计就是根据一组设计规范来设计模拟系统函数 $H_a(s)$, 使其逼近某个理想滤波器特性。

考虑因果系统 $H_a(j\Omega) = \int_0^{\infty} h_a(t) e^{-j\Omega t} dt$ 式中 $h_a(t)$ 为系统的单位冲激响应, 是实函数。

$$\therefore H_a(j\Omega) = \int_0^{\infty} h(t)(\cos \Omega t - j \sin \Omega t) dt$$

不难看出 $H_a(-j\Omega) = H_a^*(j\Omega)$

定义**振幅平方函数**

$$\begin{aligned} A(\Omega^2) &= |H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) \\ A(\Omega^2) &= H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) = H_a(s)H_a(-s)|_{s=j\Omega} \end{aligned} \quad ①$$

式中 $H_a(s)$ 、 $H_a(j\Omega)$ 、 $|H_a(j\Omega)|$ 分别为模拟滤波器的系统函数、频率响应和幅频特性。

问题：如何由已知的 $A(\Omega^2) \rightarrow H_a(s)$?

稳态条件下 $s = j\Omega, \Omega^2 = -s^2$
 $\therefore A(\Omega^2) = A(-s^2)|_{s=j\Omega}$

先在 S 复平面上标出 $A(-s^2)$ 的极点和零点，由①式知， $A(-s^2)$ 的极点和零点总是“成对出现”，且对称于 S 平面的实轴和虚轴，选用 $A(-s^2)$ 的对称极、零点的任一半作为 $H_a(s)$ 的极、零点，可得到 $H_a(s)$ 。

为了保证 $H_a(s)$ 的稳定性，应选用 $A(-s^2)$ 在 S 左半平面的极点作为 $H_a(s)$ 的极点，零点可选用任一半。

 三种模拟低通滤波器的设计：

7 巴特沃兹滤波器 (Butterworth)

特点：具有通带内最大平坦的振幅特性，且随 $f \nearrow$ 单调 \searrow ，其幅度平方函数具有如下形式：

$$A(\Omega^2) = |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

式中， N 为整数，称为滤波器的阶数， N 越大，通带和阻带的近似性越好，过渡带也越陡。如图。

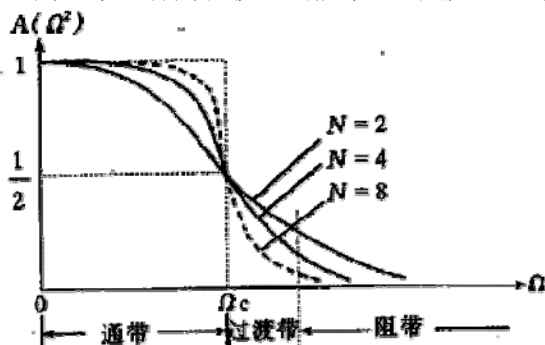



图 3.7 巴特沃兹 filter 振幅平方函数

- 1) 在通带，分母 $\Omega/\Omega_c < 1$ ，随着 N 增加， $(\Omega/\Omega_c)^{2N} \rightarrow 0$ ， $A(\Omega^2) \rightarrow 1$ 。
- 2) 在过渡带和阻带， $\Omega/\Omega_c > 1$ ，随着 N 增加， $\Omega/\Omega_c \gg 1$ ， $A(\Omega^2)$ 快速下降。
- 3) $\Omega = \Omega_c$ 时， $\frac{A(\Omega_c^2)}{A(0)} = \frac{1}{2}$ ，幅度衰减 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，相当于 3db 衰减点。

振幅平方函数的极点： $H_a(-s) * H_a(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$ 可分解为 $2N$ 个一次因式，

令分母为零， $\rightarrow s_p = (-j)^{\frac{1}{2N}}(j\Omega_c)$

可见，Butterworth 滤波器的振幅平方函数有 $2N$ 个极点，它们均匀对称地分布在 $|s| = \Omega_c$ 的圆周上。

 **例：** $N=3$ 阶 Butterworth 滤波器振幅平方函数的极点分布如图，求其系统函数。


解：考虑到系统的稳定性， Butterworth 滤波器的系统函数是由 s 平面左半部分的极点

(S_{P3}, S_{P4}, S_{P5}) 组成的，它们分别为： $S_{P3} = \Omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}}$, $S_{P4} = -\Omega_c$, $S_{P5} = \Omega_c e^{-j\frac{2\pi}{3}}$

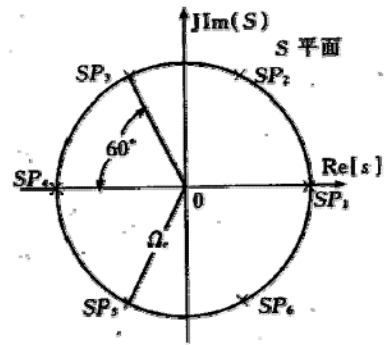
所以系统函数为：
$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s - S_{P3})(s - S_{P4})(s - S_{P5})}$$

式中 Ω_c 是为使 $S=0$ 时 $H_a(s)=1$ 而引入的。

如用 Ω_c 归一化 s ，即 $s' = s/\Omega_c$ ，得归一化的三阶 BF：


$$H_a(s') = \frac{1}{s'^3 + 2s'^2 + 2s' + 1}$$

如果要还原的话，则有
$$H_a(s) = \frac{1}{(s/\Omega_c)^3 + 2(s/\Omega_c)^2 + 2(s/\Omega_c) + 1}$$



第四章 第三节内容：

4-3 用模拟滤波器设计 IIR 滤波器

 (脉冲响应不变法概念, 映射关系)

利用模拟滤波器设计数字滤波器，就是从已知的模拟滤波器传递函数 $H_a(s)$ 设计数字滤波器传递函数 $H(z)$ ，这是一个由 S 平面到 Z 平面的映射变换，这种映射变换应遵循两个基本原则：

- 1) $H(z)$ 的频响要能模仿 $H_a(s)$ 的频响，即 S 平面的虚轴应映射到 Z 平面的单位圆 $e^{j\omega}$ 上。
- 2) $H_a(s)$ 的因果稳定性映射到 $H(z)$ 后保持不变，即 S 平面从左半平面 $\text{Re}\{S\} < 0$ 映射到 Z 平面的单位圆内 $|z| < 1$ 。

下面讨论两种常用的映射变换方法：


一、 脉冲响应不变法

利用模拟滤波器理论设计数字滤波器，也就是使数字滤波器能模仿模拟滤波器的特性，这种模仿可从不同的角度出发。脉冲响应不变法是从滤波器的脉冲响应出发，使数字滤波器的单位脉冲响应序列 $h(n)$ 模仿模拟滤波器的冲击响应 $h_a(t)$ ，使 $h(n)$ 正好等于 $h_a(t)$ 的采样值，即
$$h(n) = h_a(nT),$$

T 为采样周期。如以 $H_a(s)$ 及 $H(z)$ 分别表示 $h_a(t)$ 的拉氏变换及 $h(n)$ 的 z 变换，即

$$H_a(s) = \mathcal{L}[h_a(t)], \quad H(z) = \mathcal{Z}[h(n)]$$

则根据采样序列 z 变换与模拟信号拉氏变换的关系，得：
$$H(z) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s + j\frac{2\pi}{T}k\right)$$

 上式表明，采用脉冲响应不变法将模拟滤波器变换为数字滤波器时，它所完成的 S 平面到 Z 平面的变换，正是以前讨论的拉氏变换到 Z 变换的标准变换关系，即首先对 $H_a(s)$ 作周期延拓，然后再经过 $z=e^{sT}$ 的映射关系映射到 Z 平面上。

映射关系：

$z=e^{sT}$ 的映射关系表明， S 平面上每一条宽为 $2\pi/T$ 的横带部分，都将重叠地映射到 Z 平面的整个全部平面上。每一横带的左半部分映射到 Z 平面单位圆以内，每一横带的右半部分映射到 Z 平面单位圆以外， $j\Omega$ 轴映射在单位圆上，但 $j\Omega$ 轴上的每一段 $2\pi/T$ 都对应于绕单位圆一周。如图 3.1 所示。相应的频率变换关系为： $\omega = \Omega T$ ，显然 ω 与 Ω 为线性关系。

应当指出， $z=e^{sT}$ 的映射关系反映的是 $H_a(s)$ 的周期延拓与 $H(z)$ 的关系，而不是 $H_a(s)$ 本身与 $H(z)$ 的关系，因此，使用脉冲响应不变法时，从 $H_a(s)$ 到 $H(z)$ 并没有一个由 S 平面到 Z 平

面的简单代数映射关系，即没有一个 $s=f(z)$ 的代数关系式。另外，数字滤波器的频响也不是简单的重现模拟滤波器的频响，而是模拟滤波器频响的周期延拓，周期为 $\Omega_s=2\pi/T=2\pi f_s$ ，即

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\Omega + j\frac{2\pi m}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega + 2\pi m}{T}\right)$$

根据第一章的采样定理，如果模拟滤波器的频响带限于折叠频率 $\Omega_s/2$ 以内，即

$$H_a(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq \pi/T$$

这时数字滤波器的频响才能不失真地重现模拟滤波器的频响（在折叠频率以内）

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| < \pi$$

但任何一个实际的模拟滤波器，其频响都不可能是真正带限的，因此不可避免地存在频谱的交叠，即**频谱混淆**(图 3.2)，这时，数字滤波器的频响将不同于原模拟滤波器的频响而带有一定的失真。模拟滤波器频响在折叠频率以上衰减越大，失真则越小，这时，采用脉冲响应不变法设计的数字滤波器才能得到良好的效果。

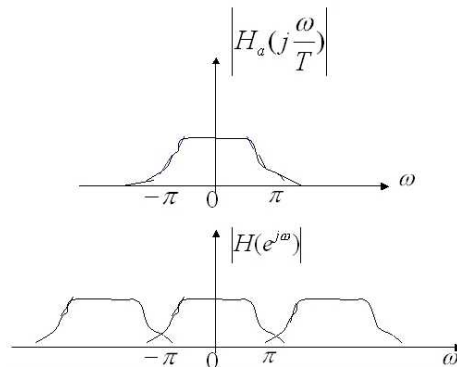


图3.2 脉冲响应不变法中的频响混淆

H(z) 的计算:

脉冲响应不变法特别适用于用部分分式表达的传递函数，模拟滤波器的传递函数若只有单阶极点，且分母的阶数高于分子阶数 $N>M$ ，则可表达为部分分式形式:

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s-s_i}$$

其拉氏反变换为:

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s-s_i}$$

其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数。对 $h_a(t)$ 采样就得到数字滤波器的单位脉冲响应序列

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i nT} u(n) = \sum_{i=1}^N A_i (e^{s_i T})^n u(n)$$

再对 $h(n)$ 取 Z 变换，得到数字滤波器的传递函数:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^N A_i (e^{s_i T})^n z^{-n} = \sum_{i=1}^N A_i \sum_{n=0}^{\infty} (e^{s_i T} z^{-1})^n$$

第二个求和为等比级数之和， $\frac{1-(e^{s_i T} z^{-1})^k}{1-e^{s_i T} z^{-1}} \Big|_{k \rightarrow \infty}$ ，要收敛的话，必有 $(e^{s_i T} z^{-1})^k \Big|_{k \rightarrow \infty} = 0$ ，所以有 $H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1-e^{s_i T} z^{-1}}$

比较部分分式形式的 $H_a(s)$ 和上式 $H(z)$ 可以看到，S 平面上的极点 $s=s_i$ ，变换到 Z 平面上是极点 $z_i = e^{s_i T}$ ，而 $H_a(s)$ 与 $H(z)$ 中部分分式所对应的系数不变。如果模拟滤波器是稳定的，则所有极点 s_i 都在 S 左半平面，即 $\text{Re}[s_i] < 0$ ，那么变换后 $H(z)$ 的极点 $z_i = e^{s_i T}$ 也都在单位圆以内，即 $|e^{s_i T}| = e^{\text{Re}[s_i] T} < 1$ ，因此数字滤波器保持稳定。

值得注意的是，这种 $H_a(s)$ 到 $H(z)$ 的对应变换关系，只有将 $H_a(s)$ 表达为部分分式形式才成立。

虽然脉冲响应不变法能保证 S 平面与 Z 平面的极点位置有一一对应的代数关系，但这并不是说整个 S 平面与 Z 平面就存在这种一一对应的关系，特别是数字滤波器的零点位置与 S 平面上的零点就没有一一对应关系，而是随着 $H_a(s)$ 的极点 s_i 与系数 A_i 的不同而不同。

举例说明脉冲响应不变法的应用。

例：将一个具有如下传递函数 $H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$

的模拟滤波器数字化。

解：直接利用 $H(z)$ 的部分分式形式，得

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}e^{-T}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-3T}} = \frac{z^{-1}(e^{-T} - e^{-3T})}{1 - z^{-1}(e^{-T} + e^{-3T}) + e^{-4T}z^{-2}}$$

模拟滤波器的频率响应为： $H_a(j\Omega) = H(s) \Big|_{s=j\Omega} = \frac{2}{(j\Omega+1)(j\Omega+3)} = \frac{2}{(\beta - \Omega^2) + j4\Omega}$

数字滤波器的频率响应为： $H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{(e^{-T} - e^{-3T})e^{-j\omega}}{1 - (e^{-T} + e^{-3T})e^{-j\omega} + e^{-4T}e^{-j2\omega}}$

模拟滤波器与数字滤波器的幅频响应如图 3.3 所示

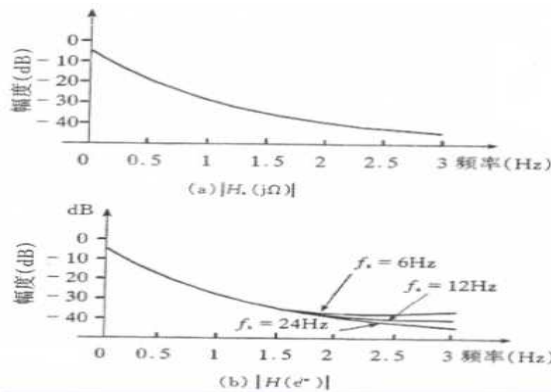


图3.3 模拟滤波器与数字滤波器的幅频响应

显然 $H(e^{j\omega})$ 与采样间隔 T 有关, T 越小, 衰减越大, 混叠越小, 当 $f_s=24\text{Hz}$ 时, 混叠可忽略不计。

$H(e^{j\omega})$ 是 $H_a(j\Omega)$ 的周期延拓 (周期为 f_s)，因 $H_a(j\Omega)$ 并不是真正带限的，即在频率超过 $f_s/2$ 时频响并不为 0，所以产生了混迭。当为低通或带通滤波器时， f_s 越大，则混迭越小。当为带阻或高通滤波器时， $H_a(j\Omega)$ 在超过 $f_s/2$ 频率部分全为通带，这就不满足抽样定理，发生了完全的混迭，所以脉冲响应不变法不能设计带阻或高通滤波器。

小结

- 1) 在要求时域脉冲响应能模仿模拟滤波器的场合，一般使用脉冲响应不变法。
- 2) 脉冲响应不变法的一个重要特点是频率坐标的变换是线性的， $\omega = \Omega T$ ， ω 与 Ω 是线性关系。因此如果模拟滤波的频响带限于折叠频率以内的话，通过变换后滤波器的频响可不失真地反映原响应与频率的关系。 $H(e^{j\omega}) = H_a(j\Omega) \quad |\Omega| < \pi/T$

例如线性相位的贝塞尔低通滤波器，通过脉冲响应不变法得到的仍是线性相位的低通数字滤波器。

- 3) 如果 $H_a(s)$ 是稳定的，即其极点在 S 左半平面，映射到 $H(z)$ 也是稳定的。
- 4) 脉冲响应不变法的最大缺点：有频谱周期延拓效应，因此只能用于带限的频响特性，如衰减特性很好的低通或带通。而高频衰减越大，频响的混淆效应越小，至于高通和带限滤波器，由于它们在高频部分不衰减，因此将完全混淆在低频响应中。所以用脉冲响应不变法实现高通和带阻滤波器时，应增加一保护滤波器，滤掉高于折叠频率以上的频带，然后再用脉冲响应不变法转换为数字滤波器，这会增加设计的复杂性和滤波器的阶数，只有在一定需要频率线性关系或保持网络瞬态响应时才采用。

二、双线性变换法

脉冲响应不变法的主要缺点是频谱交叠产生的混淆，这是从 S 平面到 Z 平面的标准变换 $z = e^{sT}$ 的多值对应关系导致的，为了克服这一缺点，设想变换分为两步：

第一步：将整个 S 平面压缩到 S_1 平面的一条横带里；

第二步：通过标准变换关系将此横带变换到整个 Z 平面上去。

由此建立 S 平面与 Z 平面一一对应的单值关系，消除多值性，也就消除了混淆现象。

为了将 s 平面的 jΩ 轴压缩到 s₁ 平面 jΩ 轴上的 $-\frac{\pi}{T} \sim \frac{\pi}{T}$ 一段上，可通过以下的正切变换实

现：
$$\Omega = c \cdot \lg\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)$$



常数 C 的两种确定方法：

用不同的方法确定待定常数 C，可以使模拟滤波器的频率特性与数字滤波器的频率特性在不同频率点有对应关系。也就是说，常数 C 可以调节频带间的对应关系。

① 保证模拟滤波器的低频特性逼近数字滤波器的低频特性。此时两者在低频处有确切的对应关系，即 $\Omega = c \cdot \lg(\omega/2)$

因为 Ω 和 ω 都比较小，所以有

$$\Omega \approx c\omega/2$$

另外，根据归一化数字频率 ω 与模拟频率 Ω 的关系， $\omega = \Omega T / \pi = \Omega T$ ，所以有 $\Omega = c \Omega T / 2$

所以， $c = 2/T$

② 保证数字滤波器的某一特定频率，如截止频率 $\omega_c = \Omega_c T$ ，与模拟滤波器的某一特定频率 Ω_c 严格对应，即

$$\begin{aligned} \Omega_c &= c \cdot \lg(\omega_c / 2) = c \cdot \lg(\Omega_c T / 2) \\ \therefore c &= \Omega_c / \lg(\Omega_c T / 2) \end{aligned}$$

当截止频率较低时，有 $c \approx \Omega_c / (\Omega_c T / 2) = 2/T$ 所以，一般取 $c = 2/T$ 。

这里 C 是待定常数，通常取 $C = 2/T$ 。用不同的方法确定 C，可使模拟滤波器的频率特性与数字滤波器的频率特性在不同频率点有对应关系。

经过这样的频率变换，当 Ω₁ 由 $-\frac{\pi}{T} \rightarrow 0 \rightarrow \frac{\pi}{T}$ 时，Ω 由 $-\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ ，即映射了整个 jΩ 轴。将这一解析关系延拓至整个 s 平面，则得到 s 平面 → s₁ 平面的映射关系：

$$s = c \cdot \text{th}\left(\frac{s_1 T}{2}\right) = c \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$

再将 s₁ 平面通过标准变换关系映射到 z 平面，即令 $z = e^{s_1 T}$

最后得 S 平面与 Z 平面的单值映射关系：
$$\begin{cases} s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \\ z = \frac{1+(T/2)s}{1-(T/2)s} \end{cases} \Rightarrow \text{称为双线性变换}$$

双线性变换法的主要优点是不存在频谱混迭。由于 S 平面与 Z 平面一一单值对应，S 平面的虚轴(整个 jΩ)对应于 Z 平面单位圆的一周，S 平面的 Ω=0 对应于 Z 平面的 ω=0， $\Omega = \infty$ 对应 $\omega \rightarrow \pi$ ，即数字滤波器的频率响应终止于折迭频率处，所以双线性变换不存在频谱混迭效应。双线性变换符合映射变换的两个基本原则。



这一变换是否符合我们一开始所提出的由模拟滤波器设计数字滤波器时，从 S 平面到 Z 平面映射变换的二个基本原则？

分析：

① 当 $z = e^{j\omega}$ 时，代入双线性变换关系式，得 $s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{2}{T} j \lg\left(\frac{e^{j\omega/2}}{2}\right) = j\Omega$

即 S 平面的虚轴映射到 Z 平面正好是单位圆。

② 将 $s = \sigma + j\Omega$ 代入 z 表达式，得 $z = \frac{(1 + \sigma T/2) + j\Omega T/2}{(1 - \sigma T/2) - j\Omega T/2}$ ， $|z| = \frac{\sqrt{(1 + \sigma T/2)^2 + (\Omega T/2)^2}}{\sqrt{(1 - \sigma T/2)^2 + (\Omega T/2)^2}}$

当 $\sigma < 0$ 时， $|z| < 1$ ； $\sigma > 0$ 时， $|z| > 1$

即 s 左半平面映射在单位圆内，s 右半平面映射在单位圆外，因此稳定的模拟滤波器通过双线性变换后，所得到的数字滤波器也是稳定的。



小结：(双线性变换主要优点, 双线性变换法的缺点, H(z) 的计算, 预畸)

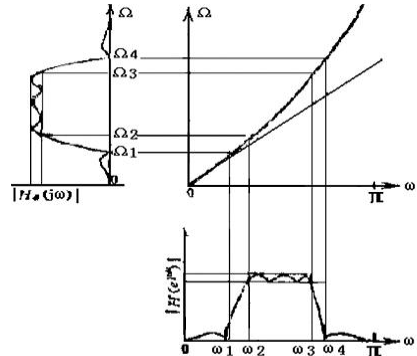
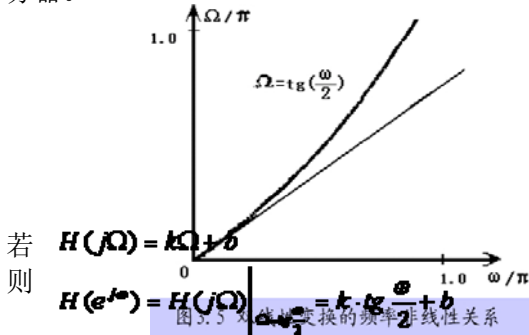
1) 双线性变换主要优点：

靠频率的严重非线性关系得到 S 平面与 Z 平面的单值一一对应关系，整个 jΩ 轴单值对应于单位圆一周，这个频率关系为 $\Omega = \frac{2}{T} \lg\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ，其中 ω 和 Ω 为非线性关系。图 3.5 中看到，在零频

率附近, $\Omega \sim \omega$ 接近于线性关系, 如图 3.5, Ω 进一步增加时, ω 增长变得缓慢, $\Omega \rightarrow \omega$ 时 $\omega = \pi$ (ω 终止于折叠频率处), 所以双线性变换不会出现由于高频部分超过折叠频率而混淆到低频部分去的现象。

2) 双线性变换法的缺点:

Ω 与 ω 的非线性关系, 导致数字滤波器的幅频响应相对于模拟滤波器的幅频响应有畸变。例如, 一个模拟微分器, 它的幅度与频率是线性关系, 但通过双线性变换后, 不可能得到数字微分器。



另外, 一个线性相滤波器不再具有线性相位特性。虽然双线性变换有这样的缺点, 但它目前仍是使用得最普遍、最有效的一种设计工具。这是因为大多数滤波器都具有分段常数的频响特性, 如低通、高通、带通和带阻等, 它们在通带内要求逼近一个衰减为零的常数特性, 在阻带部分要求逼近一个衰减为 ∞ 的常数特性, 这种特性的滤波器通过双线性变换后, 虽然频率发生了非线性变化, 但其幅频特性仍保持分段常数的特性。

例如, 一个考尔型的模拟滤波器 $H_a(s)$, 双线性变换后, 得到的 $H(z)$ 在通带与阻带内都仍保持原模拟滤波器相同的等起伏特性, 只是通带截止频率、过渡带的边缘频率, 以及起伏的峰点、谷点频率等临界频率点发生了非线性变化, 即畸变。这种频率点的畸变可以通过预畸来加以校正, 即将模拟滤波器的临界频率事先加以畸变, 通过双线性变换后正好映射到所需要的数字频率上。

预畸变的方法:

1) 根据所要设计的数字滤波器的临界频率 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 、 ω_4 , 计算模拟滤波器的临界频率。低通变换时计算公式为:

$$\Omega_1 = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \Omega_2 = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad \Omega_3 = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_3}{2}\right), \quad \Omega_4 = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_4}{2}\right)$$

- 2) 根据这些模拟滤波器的临界频率点设计模拟滤波器。
- 3) 作双线性变换, 得到所需的数字滤波器。

传递函数 $H(z)$ 的计算

双线性变换比脉冲响应法的设计计算更直接和简单。由于 s 与 z 之间的简单代数关系, 所以从模拟传递函数可直接通过代数置换得到数字滤波器的传递函数。

置换过程

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a\left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

频响

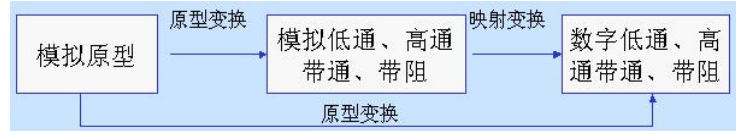
$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\Omega) \Big|_{\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)} = H_a\left(j \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$$

一般, 当着眼于滤波器的时域瞬态响应时, 采用脉冲响应不变法较好, 而其它情况下, 对于 IIR 的设计, 大多采用双线性变换。

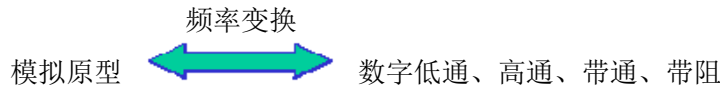
第四章 第四节内容:

4-4 从模拟滤波器低通原型到各种数字滤波器的频率变换

对于模拟滤波器，已经形成了许多成熟的设计方案，如巴特沃兹滤波器，切比雪夫滤波器等，每种滤波器都有自己的一套准确的计算公式，同时，也已制备了大量归一化的设计表格和曲线，为滤波器的设计和计算提供了许多方便，因此在模拟滤波器的设计中，只要掌握原型变换，就可以通过归一化低通原型的参数，去设计各种实际的低通、高通、带通或带阻滤波器。这一套成熟、有效的设计方法，也可通过前面所讨论的各种变换应用于数字滤波器的设计，具体过程如下：



也可把前两步合并成一步，直接从模拟低通归一化原型通过一定的频率变换关系，完成各类数字滤波器的设计，设计过程如下：



下面举例讨论应用模拟滤波器低通原型，设计各种数字滤波器的基本方法，着重讨论双线性变换法。

双线性变换法由模拟原型设计数字滤波器的四个步骤：

- 1) 确定数字滤波器的性能要求，确定各临界频率 $\{\omega_k\}$ 。
- 2) 由变换关系将 $\{\omega_k\}$ 映射到模拟域，得出模拟滤波器的临界频率值 $\{\Omega_k\}$ 。
- 3) 根据 $\{\Omega_k\}$ 设计模拟滤波器的 $H_a(s)$ 。
- 4) 把 $H_a(s)$ 变换成数字滤波器传递函数 $H(z)$ 。

7 低通变换

例 1. 设采样周期 $T=250\mu s$ ($f_s=4kHz$)，设计一个三阶巴特沃兹 LP 滤波器，其 3dB 截止频率 $f_c=1kHz$ 。分别用脉冲响应不变法和双线性变换法求解。

解：a. 脉冲响应不变法

由于脉冲响应不变法的频率关系是线性的，所以可直接按 $\Omega_c = 2\pi f_c$ 设计 $H_a(s)$ 。根据上节的讨论，以截止频率 Ω_c 归一化的三阶巴特沃兹滤波器的传递函数为：
$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}$$
以 s/Ω_c 代替其归一化频率，得：

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 2(s/\Omega_c) + 2(s/\Omega_c)^2 + (s/\Omega_c)^3}$$

也可以查表得到巴特沃兹多项式的系数，之后以 s/Ω_c 代替归一化频率，即得 $H_a(s)$ 。

将 $\Omega_c = 2\pi f_c$ 代入，就完成了模拟滤波器的设计，但为简化运算，减小误差积累， f_c 数值放到数字滤波变换后代入。

为进行脉冲响应不变法变换，计算 $H_a(s)$ 分母多项式的根，将上式写成部分分式结构：

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c} + \frac{-\Omega_c/\sqrt{3}e^{j\pi/6}}{s + \Omega_c(1 - j\sqrt{3})/2} + \frac{-\Omega_c/\sqrt{3}e^{-j\pi/6}}{s + \Omega_c(1 + j\sqrt{3})/2}$$

对照前面学过的脉冲响应不变法中的部分分式形式有 $A_1 = \Omega_c, s_1 = -\Omega_c; A_2 = -\Omega_c/\sqrt{3}e^{j\pi/6}$

将上式系数代入数字滤波器的传递函数：
$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

Si : 极点 $s_2 = -\Omega_c(1 - j\sqrt{3})/2; A_3 = -\Omega_c/\sqrt{3}e^{-j\pi/6}, s_3 = -\Omega_c(1 + j\sqrt{3})/2$

并将 $\Omega_c = \omega_c/T$ 代入，计算得：

$$H(z) = \frac{\omega_c/T}{1 - e^{-\omega_c} z^{-1}} + \frac{-(\omega_c/\sqrt{3}T)e^{j\pi/6}}{1 - e^{-\omega_c(1 - j\sqrt{3})/2} z^{-1}} + \frac{-(\omega_c/\sqrt{3}T)e^{-j\pi/6}}{1 - e^{-\omega_c(1 + j\sqrt{3})/2} z^{-1}}$$

合并上式后两项，并将 $\omega_c = 2\pi f_c T = 0.5\pi$ 代入，计算得：

$$H(z) = \frac{1}{T} \left(\frac{1.571}{1 - 0.2079 z^{-1}} + \frac{-1.571 + 0.5541 z^{-1}}{1 - 0.1905 z^{-1} + 0.2079 z^{-2}} \right)$$

可见, $H(Z)$ 与采样周期 T 有关, T 越小, $H(Z)$ 的相对增益越大, 这是不希望的。为此, 实际应用脉冲响应不变法时稍作一点修改, 即求出 $H(Z)$ 后, 再乘以因子 T , 使 $H(Z)$ 只与 ω_c 有关, 即只与 f_c 和 f_s 的相对值 f_c/f_s 有关, 而与采样频率 f_s 无直接关系。例如, $f_s=4\text{KHZ}, f_c=1\text{KHZ}$ 与 $f_s=4\text{KHZ}, f_c=10\text{KHZ}$ 的数字滤波器具有相同的传递函数, 这一结论适合于所有的数字滤波器设计。最后得:

$$H(Z) = \frac{1.571}{1-0.2079z^{-1}} + \frac{-1.571+0.554z^{-1}}{1-0.1905z^{-1}+0.2079z^{-2}}$$

b. 双线性变换法

(一) 首先确定数字域临界频率 $\omega_c = 2\pi f_c T = 0.5\pi$

(二) 根据频率的非线性关系, 确定预畸的模拟滤波器临界频率 $\Omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \frac{2}{T}$

(三) 以 S/Ω_c 代入归一化的三阶巴特沃模拟器传递函数

$$H_a(s) = \frac{1}{1+2(s/\Omega_c)+2(s/\Omega_c)^2+(s/\Omega_c)^3} \quad \text{并将 } \Omega_c=2/T \text{ 代入上式。}$$

(四) 将双线性变换关系代入, 求 $H(Z)$ 。

$$\begin{aligned} H(Z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} &= \frac{1}{1+2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3} \\ &= \frac{(1+z^{-1})^3}{(1+z^{-1})^3+2(1-z^{-1})(1+z^{-1})^2+2(1-z^{-1})^2(1+z^{-1})+(1-z^{-1})^3} \\ &= \frac{(1+z^{-1})^3}{(1+z^{-1})^3+2(1-z^{-1})(1+z^{-1})(1+z^{-1}+1-z^{-1})+(1-z^{-1})^3} \\ &= \frac{(1+z^{-1})^3}{(1+z^{-1})^3+4(1-z^{-1})(1+z^{-1})+(1-z^{-1})^3} \\ &= \frac{(1+z^{-1})^3}{(1+z^{-1})(1+2z^{-1}+z^{-2}+2-2z^{-1})+(1-z^{-1})(2+2z^{-1}+1-2z^{-1}+z^{-2})} \\ &= \frac{(1+z^{-1})^3}{(3+z^{-2})(1+z^{-1}+1-z^{-1})} = \frac{1}{2} \frac{(1+z^{-1})^3}{3+z^{-2}} \end{aligned}$$

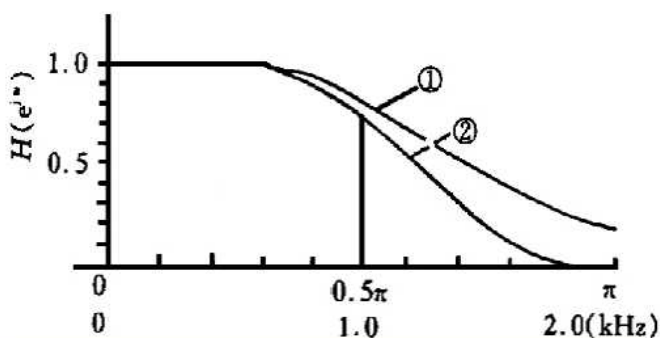


图3.11 两种设计方法所得到的频响

图 3.11 为两种设计方法所得到的频响, 对于双线性变换法, 由于频率的非线性变换, 使截止区的衰减越来越快, 最后在折叠频率处 ($Z=-1, \omega = \pi$) 形成一个三阶传输零点, 这个三阶零点正是模拟滤波器在 $\Omega = \infty$ 处的三阶传输零点通过映射形成的。因此, 双线性变换法使过渡带变窄, 对频率的选择性改善, 而脉冲响应不变法存在混淆, 且没有传输零点。

2 高通变换

😊 变换方法的选用

设计高通、带通、带阻等数字滤波器时，有两种方法：

① 先设计一个相应的高通、带通或带阻模拟滤波器，然后通过脉冲响应不变法或双线性变换法转换为数字滤波器。

模拟原型 → 模拟高通、带通、带阻 → 数字高通、带通、带阻
设计方法同上面讨论的低通滤波器的设计。

即确定 $\{\omega_k\}$ → 转换为相应的 $\{\Omega_k\}$

高通、带通、带阻 模拟滤波器的设计

$H_a(s) \rightarrow H_a(Z)$

② 直接利用模拟滤波器的低通原型，通过一定的频率变换关系，一步完成各种数字滤波器的设计。

模拟原型 ↔ 数字低通、高通、带通、带阻

这里只讨论第二种方法。因其简捷便利，所以得到普遍采用。

变换方法的选用：

1. **脉冲响应不变法：**对于高通、带阻等都不能直接采用，或只能在加了保护滤波器后才可用。因此，使用直接频率变换（第二种方法），对脉冲响应不变法要许多特殊的考虑，它一般应用于第一种方法中。

2. **双线性变换法：**下面的讨论均用此方法，实际使用中多数情况也是如此。

基于双线性变换法的高通滤波器设计：

在模拟滤波器的高通设计中，低通至高通的变换就是 S 变量的倒置，这一关系同样可应用于双线性变换，只要将变换式中的 S 代之以 1/S，就可得到数字高通滤波器。即

$$s = \frac{T}{2} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

由于倒数关系不改变模拟滤波器的稳定性，因此，也不会影响双线性变换后的稳定条件，而且 $j\Omega$ 轴仍映射在单位圆上，只是方向颠倒了。即

$$Z = e^{j\omega T} \text{ 时, } s = \frac{T}{2} \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = -\frac{T}{2} j \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = j\Omega$$

$$\Omega = -\frac{T}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right), \text{ 如图 3.12.}$$

例 1

这一曲线的形状与双线性变换时的频率非线性关系曲线相对应，只是将 ω 坐标倒置，因而通过这一变换后可直接将模拟低通变为数字高通，如图

3.13。

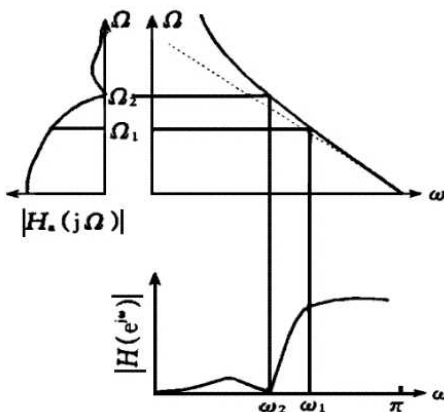
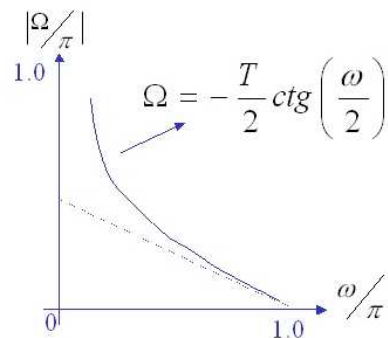


图3.13 高通原型变换



$\Omega=0$ 映射到 $\omega = \pi$ 即 $z = -1$, $\Omega=\infty$ 映射到 $\omega = 0$ 即 $z = 1$

图3.12 高通变换频率关系

应当明确：所谓高通 DF，并不是 ω 高到 ∞ ，由于数字频域存在折叠频率 $\omega = \pi$ 对于实数响应的数字滤波器， ω 由 $\pi \sim 2\pi$ 部分只是 ω 由 $\pi \sim 0$ 的镜像部分，因此有效的数字域仅是 $\omega = 0 \sim \pi$ ，高通也仅指这一段的高端，即到 $\omega = \pi$ 为止的部分。

高通变换的计算步骤和低通变换一样。但在确定模

拟原型预畸的临界频率时, 应采用 $\Omega_k = \frac{T}{2} \cot\left(\frac{\omega_k}{2}\right)$

不必加负号, 因临界频率只有大小的意义而无正负的意义。

 例 2. 确定最小阶数 N。

模拟切比雪夫滤波器设计中阶数的确定公式为 $N \geq \frac{\cosh^{-1}(\sqrt{A^2 - 1/\epsilon^2})}{\cosh^{-1}(\Omega_p/\Omega_s)}$
 今 $\delta = 0.5$, $\therefore \epsilon^2 = 10^{1.18} - 1 = 0.1220184$

A^2 实际是与阻带最小衰减有关的值, $1/A^2$ 是阻带内最大振幅平方, 也就是最小阻带衰减, 如以分贝值表示这一衰减量, 则 $10 \lg \frac{1}{A^2} = -e(\text{dB})$

e 是以分贝计的阻带衰减。今最小阻带衰减为 $e=19\text{dB}$, 故将 Ω_p , Ω_s , A^2 及 ϵ 一起代入上式, 即求得最小的 N 。

带通变换

如图, 如果数字频域上带通的中心频率为 ω_0 , 则带通变换的目的是将: 模拟低通 $\Omega=0 \rightarrow \pm\infty$

$$\Omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty \xrightarrow{\text{映射}} \omega = 0 \rightarrow \omega_0 \rightarrow \pi$$

$$\Omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty \xrightarrow{\text{映射}} \omega = -\pi \rightarrow -\omega_0 \rightarrow 0$$

(频率映射关系具有周期性, 幅频响应具有原点对称性)。

即将 S 的原点映射到 $z = e^{\pm j\omega_0}$ 而将 $S = \pm j\infty$ 点映射到 $z = \pm 1$, 满足这一要求的双线性变换为:

$$s = \frac{(z - e^{j\omega_0})(z - e^{-j\omega_0})}{(z - 1)(z + 1)} = \frac{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}{z^2 - 1}$$

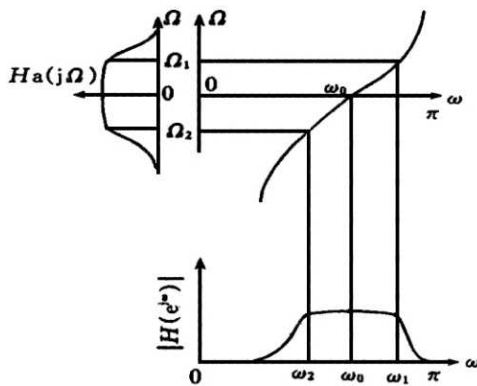


图3.15 带通原型变换

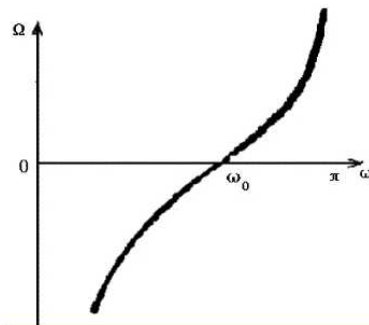


图3.16 带通变换的频率关系

$$s = \frac{e^{j2\omega} - 2e^{j\omega} \cos \omega_0 + 1}{e^{j2\omega} - 1} = \frac{(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) - 2 \cos \omega_0}{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}$$

当 $z = e^{j\omega}$ 时

$$s = j \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega}{\sin \omega}, \text{ 又 } \because s = j\Omega$$

$$\Omega = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega}{\sin \omega}$$

因此 (带通频率变换关系)

图 3.16 中 $\Omega=0$ 点正好映射在 $\omega=\omega_0$ 上, 而 $\Omega = \pm\infty$ 映射在 $\omega=0, \pi$ 两端, 因此满足带通变换的要求。



稳定性证明:

这一变换满足稳定性要求。



设计

设 $z = r \geq 0$

$$s = \frac{r^2 - 2r \cos \omega_0 + 1}{r^2 - 1}$$

由于上式完全是实数, 所以是映射在 S 平面 σ 轴上。

$$\sigma = \frac{r^2 + 1 - 2r \cos \omega_0}{r^2 - 1} = \frac{(r-1)^2 + 2r(1 - \cos \omega_0)}{r^2 - 1}$$

其中分子永远非负的 $(r^2 - 1) + 2r(1 - \cos \omega_0) \geq 0$
因此, σ 的正负决定于分母 $r^2 - 1$,
 $r < 1$ 时, $\sigma < 0$
 $r > 1$ 时, $\sigma > 0$

由此证明了, S 左半平面映射在单位圆内, 而右半平面映射在单位圆外, 这种变换关系是稳定的变换关系, 可用它来完成带通的变换, 如图 3.15。



设计: 设计带通滤波器时, 一般只给出上、下边带的截止频率 ω_1, ω_2 作为设计要求。

为了应用以上变换, 首先要将上下边带参数 ω_1, ω_2 换算成中心频率 ω_0 及模拟低通截止频率 Ω_c 。

$$\omega_1, \omega_2 \xrightarrow{*} \omega_0, \Omega_c$$

为此将 ω_1, ω_2 代入变换关系式:

$$\Omega_1 = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_1}{\sin \omega_1}, \quad \Omega_2 = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_2}{\sin \omega_2}$$

由于 Ω_1, Ω_2 在模拟低通中是一对镜像频率, $\Omega_1 = -\Omega_2$ 代入上面两等式, 求出 $\cos \omega_0$

$$\cos \omega_0 = \frac{\sin(\omega_1 + \omega_2)}{\sin \omega_1 + \sin \omega_2} = \frac{\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)}$$

又 Ω_1 同时也就是模拟低通的截止频率 Ω_c 。 $\therefore \Omega_c = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_1}{\sin \omega_1}$

有了这两个参数就可完成全部计算。



例: 采样 $f_s = 400\text{kHz}$, 设计一巴特沃兹带通滤波器, 其 3dB 边界频率分别为 $f_2 = 90\text{kHz}, f_1 = 110\text{kHz}$, 在阻带 $f_3 = 120\text{kHz}$ 处最小衰减大于 10dB。

解: 确定数字频域的上下边带的角频率

$$\omega_1 = 2\pi f_1 / f_s = 0.55\pi \quad \omega_2 = 2\pi f_2 / f_s = 0.45\pi \quad \omega_3 = 2\pi f_3 / f_s = 0.6\pi$$

$$\cos \omega_0 = \frac{\sin(0.45\pi + 0.55\pi)}{\sin 0.45\pi + \sin 0.55\pi} \rightarrow \omega_0 = 0.5\pi$$

求中心频率:

求模拟低通的通带截止频率 Ω_c 与阻带边界频率 Ω_s :

$$\Omega_c = \frac{\cos 0.5\pi - \cos 0.55\pi}{\sin 0.55\pi} = 0.1584 \quad \Omega_s = \frac{\cos 0.5\pi - \cos 0.6\pi}{\sin 0.6\pi} = 0.3249$$

从 Ω_c 到 Ω_s 频率增加了约 1.05 倍, 衰减增加了 (10-3) dB, 如左图, 故选用二阶巴特沃兹滤波器可满足指标 (查表)。

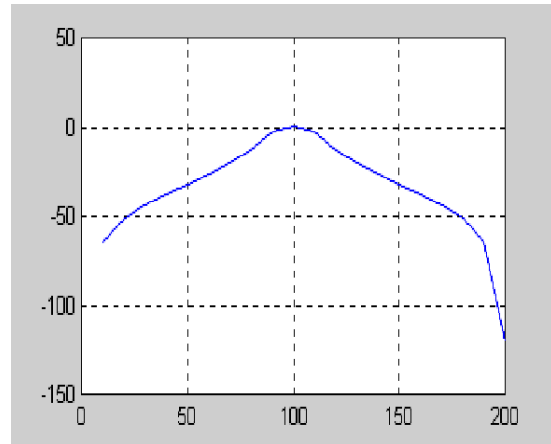
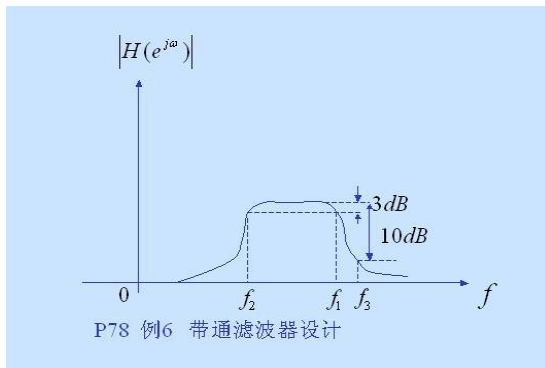
$$\text{归一化的系统函数: } H'_G(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

$$\text{代入 } \Omega_c, \quad H_c(s) = \frac{1}{(s/\Omega_c)^2 + \sqrt{2}(s/\Omega_c) + 1}$$

代入变换公式, $s = \frac{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$ 得到:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{6317^2 \left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2 + \sqrt{2} \cdot 6317 \frac{z^2+1}{z^2-1} + 4983z^4 + 77.8z^2 + 4983} \frac{(z^2-1)^2}{z^2-1}$$

设计结果如右图。



4 带阻变换

把带通的频率关系倒置就得到带阻变换。

$$s = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 2z \cos \alpha_0 + 1}, \quad \Omega = \frac{\sin \omega}{\cos \omega - \cos \alpha_0}$$

给定 $\omega_1, \omega_2 \xrightarrow{\text{求}} \omega_0, \Omega_0, \quad \Omega_0 = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0}$

$\Omega \leftrightarrow \omega$ 的频率变换关系如图 1。计算方法同带通，不再讨论。

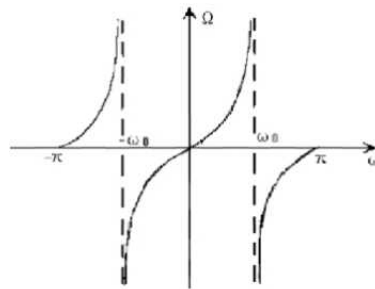


图3.17 带阻变换的频率关系

第五章 第一节

第五章 有限长单位冲激响应(FIR)滤波器的设计

- 线性相位 FIR 数字滤波器的特性
- 窗口设计法
- 频率取样法

学习要求: 掌握线性相位的条件; 熟练掌握 FIR 线性相位滤波器的幅频特性; 会用窗口法和频率采样法设计 FIR 滤波器。

第五章 第一节内容:

5-1 线性相位 FIR 数字滤波器的特性

概述  FIR 数字滤波器的特点

FIR 数字滤波器的差分方程描述
$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i) \quad ①$$

对应的系统函数为
$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i} \quad ②$$

因为它是一种线性时不变系统, 也可用卷积和形式表示
$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i) \quad ③$$

比较①、③得:
$$a_i = h(i) \\ H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)z^{-i}$$

设计任务是求 $h(i)$ 。

FIR 数字滤波器的特点(与 IIR 数字滤波器比较):

优点:

- (1) 很容易获得严格的线性相位, 避免被处理的信号产生相位失真, 这一特点在宽频带信号处理、阵列信号处理、数据传输等系统中非常重要;
- (2) 可得到多带幅频特性;

5.1.1 线性相位特性

线性相位条件:
$$\begin{cases} h(n) = h(N-1-n) \text{ 偶对称} \\ h(n) = -h(N-1-n) \text{ 奇对称} \end{cases}$$

即如果单位脉冲响应 $h(n)$ 为实数, 且具有偶对称或奇对称性, 则 FIR 数字滤波器具有严格的线性相位特性。

 证明:

1. 当 $h(n) = h(N-1-n)$ 时, 可实现线性相位。

FIR DF 的系统函数
$$H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)Z^{-n} = \sum_{m=1}^{N-1} h(N-1-m)Z^{-m}$$

令 $m = N-1-n$

$$H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)Z^{-(N-1-m)} = Z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)Z^m = Z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

H(z) 可写为

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2} [H(z) + z^{-(N-1)} H(z^{-1})] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [z^{-n} + z^{-(N-1)} z^n] \\ &= z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{z^{-\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + z^{\left(n-\frac{N-1}{2}\right)}}{2} \right] \end{aligned}$$

因此, 令 $z = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right]$$

式中, 求和部分全部为实数, 令其等于 $H(\omega)$, 则 $H(e^{j\omega})$ 可写为 $H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

其中

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right] \\ \varphi(\omega) &= -\omega \left(\frac{N-1}{2} \right) \end{aligned}$$

$H(\omega)$ 称为幅度函数, 可正可负, 区别于幅频响应函数 $|H(e^{j\omega})|$, 相位函数 $\varphi(\omega)$ 随频率线性变化, 具有严格的线性特性。

2. 当 $h(n) = -h(N-1-n)$ 时, 可实现线性相位。

同理可证

$$h(n) = -h(N-1-n) \text{ 时, } H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right]$$

$$\text{相位函数 } \varphi(\omega) = -\omega \left(\frac{N-1}{2} \right) - \frac{\pi}{2}$$

上式表明, $h(n)$ 奇对称时, FIR DF 是一个具有严格线性相位的理想正交变换网络。其相频特性如图 2。

5.1.2 线性相位 FIR 滤波器的幅度特性

$H(\omega)$ 分四种情况。

1 $h(n)$ 偶对称, N 为奇数

$$\begin{cases} H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \\ b(n) = 2h \left(\frac{N}{2} - 1 + n \right) \end{cases}$$

这时, 据前面的讨论,

由于 $\cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$ 对 $\omega = \pi$ 故除 $n = \frac{N-1}{2}$ 点外, 求和 \sum 内的第 n 项与第 $N-1-n$ 项两两相

等, 可合并 $H(\omega) = h \left(\frac{N-1}{2} \right) + \sum_{n=1}^{N/2-1} 2h \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \cos \omega n$

令 $n = \frac{N-1}{2} - m$, 则 $H(\omega) = \sum_{m=1}^{N/2-1} a(m) \cos m\omega$

其中 $a(0) = h \left(\frac{N-1}{2} \right), a(m) = 2h \left(\frac{N-1}{2} - m \right), m = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$

由于 $\cos m\omega$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 偶对称, 因此 $H(\omega)$ 对这些频率也呈偶对称。

2 $h(n)$ 偶对称, N 为偶数

因 $H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right]$

N 为偶数，上式中两两项全部可合并，于是

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right]$$

$$= \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} 2h(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right]$$

令 $n = \frac{N}{2} - 1 + m$ ，则

$$\begin{cases} H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \\ b(n) = 2h \left(\frac{N}{2} - 1 + n \right) \end{cases}$$

由于 $\cos \left(\left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right)$ 对 $\omega = \pi$ 奇对称，所以 $H(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 也为奇对称，且由于 $\omega = \pi$ 时， $\cos \left(\left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right) = 0$ ，即 $H(\pi) = 0$ ，所以， $H(z)$ 在 $z = -1$ 处必有一零点，因此不能用这种情况设计 $\omega = \pi$ 时 $H(\omega) \neq 0$ 的滤波器，如高通、带阻滤波器。

3 $h(n)$ 奇对称，N 为奇数。

这时， $h(n) = -h(N-1-n)$ ，必有， $h \left(\frac{N-1}{2} \right) = 0$ ，因

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right]$$

$H(\omega)$ 求和式中两两项合并，并令 $n = m + (N-1)/2$ ，得：

$$H(\omega) = \sum_{n=\frac{N-1}{2}}^{N-1} 2h(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right]$$

$$= \sum_{m=1}^{\frac{(N-1)/2}{2}} 2h \left(\frac{N-1}{2} + m \right) \sin m \omega$$

所以

$$\begin{cases} H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin n \omega \\ c(n) = 2h \left(\frac{N-1}{2} + n \right) \end{cases}$$

由于 $\sin n \omega$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 点呈奇对称，所以 $H(\omega)$ 对这些也奇对称。

由于 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 时， $\sin n \omega = 0, H(\omega) = 0$ ，相当于 $H(z)$ 在 $z \pm 1$ 处有两个零点，故不能用于 $H(0) \neq 0$ 和 $H(\pi) \neq 0$ 的滤波器，即不能用作低通或高通。

4 $h(n)$ 偶对称，N 为偶数

这时， $H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right]$

全部两两项合并， $H(\omega) = \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} 2h(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right] = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h \left(\frac{N}{2} - 1 + m \right) \sin \left[\omega \left(m - \frac{1}{2} \right) \right]$

或 $H(\omega) = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} d(m) \sin \left[\omega \left(m - \frac{1}{2} \right) \right]$ $d(m) = 2h \left(\frac{N}{2} - 1 + m \right)$

由于 $\sin \left[\omega \left(m - \frac{1}{2} \right) \right]$ 在 $\omega = 0, 2\pi$ 处为零，故 $H(\omega)$ 在 $\omega = 0, 2\pi$ 处为零，即 $H(z)$ 在 $z = 1$ 上有零点，

并对 $\omega = 0, 2\pi$ 奇对称。所以不能作低通，但在 $\omega = \pi$ 处， $\sin \left[\omega \left(m - \frac{1}{2} \right) \right]$ 有极值，所以可以作高通。

表 4.1 四种线性相位 FIR 滤波器特性

- 第一种情况，偶对称、奇数点，四种滤波器都可设计；
- 第二种情况，偶对称、偶数点，可设计低、带通滤波器，不能设计高通和带阻；
- 第三种情况，奇对称、奇数点，只能设计带通滤波器，其它滤波器都不能设计；
- 第四种情况，奇对称、偶数点，可设计高、带通滤波器，不能设计低通和带阻。

可见，四种 FIR 数字滤波器的相位特性只取决于 $h(n)$ 的对称性，而与 $h(n)$ 的值无关，其幅度特性取决于 $h(n)$ ，所以，设计 FIR 数字滤波器时，在保证 $h(n)$ 对称的条件下，只要完成幅度特性的逼近即可。

注意：当 $H(\omega)$ 用 $|H(\omega)|$ 表示时，当 $H(\omega)$ 为奇对称时，其相频特性中还应加一个固定相移 π 。

5.1.3 线性相位 FIR 滤波器的零点特性

由于线性相位 FIR 滤波器的单位冲激响应具有对称性。

即 $h(n) = \pm h(N-1-n)$ ，+、- 对应奇偶对称。

经 $m=N-1-n$ 置换可得 $H(z) = \pm z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$

由该式可看出，若 $z=z_i$ 是 $H(z)$ 的零点，则 $z=z_i^{-1}$ 也一定是 $H(z)$ 的零点。由于 $h(n)$ 是实数， $H(z)$ 的零点还必须共轭成对，所以 $z=z_i^*$ 及 $z=1/z_i^*$ 也必是零点。

因此，线性相位滤波器的零点必须是互为倒数的共轭对，即成四对出现，这种共轭对共有四种可能的情况：

- ① 既不在单位圆上，也不在实轴上，有四个互为倒数的两组共轭对，
 $z_i, z_i^*, 1/z_i, 1/z_i^*$ ，图 4.1(a)
- ② 在单位圆上，但不在实轴上，因倒数等于其共轭，有一对共轭零点，
 z_i, z_i^* ，图 4.1(b)
- ③ 不在单位圆上，但在实轴上，共轭是其本身，有一对互为倒数的零点，
 $z_i, 1/z_i$ ，图 4.1(c)
- ④ 既在单位圆上，又在实轴上，共轭和倒数都合为一点，所以成单出现，只有两种可能， $z_i=1$ 或 $z_i=-1$ ，如图 4.1(d)。

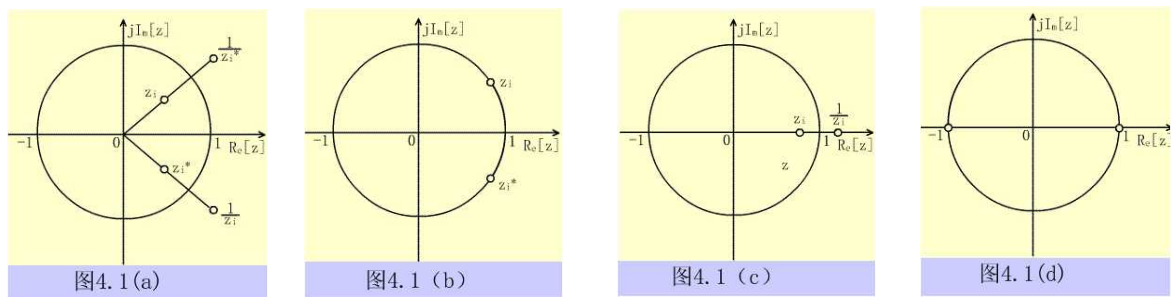


图 4.1 线性相位 FIR 滤波器的四种不同零点结构

我们从幅度响应的讨论中已经知道，对于第二种 FIR 滤波器 ($h(n)$ 偶对称， N 为偶数)， $H(\pi) = 0$ ，即 $z = e^{j\pi} = -1$ 是 $H(z)$ 的零点，既在单位圆，又在实轴，所以，必有单根；同样道理，对于第三种 FIR 滤波器， $h(n)$ 奇对称， N 为奇数，因 $H(0) = 0, H(\pi) = 0$ 所以 $z=1, z=-1$ 都是 $H(z)$ 的单根；对于第四种滤波器， $h(n)$ 奇对称， N 为偶数， $H(0) = 0$ ，所以 $z=1$ 是 $H(z)$ 的单根。

所以， $h(n)$ 奇对称 $\rightarrow H(0) = 0$

N 为偶数 $\rightarrow H(\pi) = 0$

线性相位滤波器是 FIR 滤波器中最重要的一种，应用最广。实际使用时应根据需要选择其合适类型，并在设计时遵循其约束条件。

第五章 第二节内容：

5-2 窗口设计法（时间窗口法）

😊 设计步骤

如果希望得到的滤波器的理想频率响应为 $H_d(e^{j\omega})$ ，则 FIR 滤波器的设计就是寻找一个传递函数 $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$ 去逼近 $H_d(e^{j\omega})$ ，在这种逼近中有两种直接的方法，一是从时域入手，这就是本节要讲的时间窗口设计法，另一种从频域入手，即下节讲的频率采样法。

时间窗口设计法是从单位脉冲响应序列着手，使 $h(n)$ 逼近理想的单位脉冲响应序列 $h_d(n)$ 。

我们知道 $h_d(n)$ 可以从理想频响 $H_d(e^{j\omega})$ 通过付氏反变换获得 $h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

但一般来说，理想频响都为分段恒定的，在边界频率处有突变点，所以，这样得到的理想单位脉冲响应 $h_d(n)$ 往往都是无限长序列，而且是非因果的。但 FIR 的 $h(n)$ 是有限长的，问题是怎样用一个有限长的序列去近似无限长的 $h_d(n)$ 。最直接简单的办法是直接截取其一段来代替。这种截取可以形象地想象为 $h(n)$ 就好像是通过一个“窗口”所看到一段 $h_d(n)$ ，因此， $h(n)$ 也可

表示为 $h_d(n)$ 和一个“窗函数”的乘积，即

$$h(n) = w(n) h_d(n)$$

在这里窗口函数就是矩形脉冲函数 $R_N(n)$ ，当然以后我们还可看到，为了改善设计滤波器的特性，它还可以有其它的形式，相当于在矩形窗内对 $h_d(n)$ 作一定的加权处理。

设计步骤：

$$H_d(e^{j\omega}) \Rightarrow h_d(n) \Rightarrow h_d(n)w(n)$$

$$H(e^{j\omega}) \Leftarrow h(n)$$

计算 $H(e^{-j\omega})$ 的三种方法：

- 1) 由定义 $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega}$
- 2) DFT $[h(n)] \xrightarrow{\text{插值}} H(e^{j\omega})$
- 3) 卷积

几种常用的窗函数：😊 (矩形窗, 汉宁窗, 汉明窗, 布莱克曼窗, 凯塞窗)

1. 矩形窗
2. 汉宁窗 (升余弦窗)

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_{N/2}(n) = 0.5 R_{N/2}(n) - 0.25 \left(e^{j\frac{2\pi n}{N-1}} + e^{-j\frac{2\pi n}{N-1}} \right) R_{N/2}(n)$$

利用付氏变换的移位特性，汉宁窗频谱的幅度函数 $W(\omega)$ 可用矩形窗的幅度函数表示为：

$$W(\omega) = 0.5W_2(\omega) + 0.25 \left[W_2\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_2\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right]$$

三部分矩形窗频谱相加，使旁瓣互相抵消，能量集中在主瓣，旁瓣大大减小，主瓣宽度增加 1 倍。

3. 汉明窗 (改进的升余弦窗)

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_{N/2}(n)$$

它是对汉宁窗的改进，在主瓣宽度 (对应第一零点的宽度) 相同的情况下，旁瓣进一步减小，可使 99.96% 的能量集中在主瓣内。

4. 布莱克曼窗 (三阶升余弦窗)

$$w(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) - 0.38 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \right] R_{N/2}(n)$$

增加一个二次谐波余弦分量，可进一步降低旁瓣，但主瓣宽度进一步增加，增加 N 可减少过渡带。

频谱的幅度函数为：

$$W(\omega) = 0.42W_2(\omega) + 0.25 \left[W_2\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_2\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] + 0.04 \left[W_2\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right) + W_2\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right) \right]$$

5. 凯塞窗

以上四种窗函数，都是以增加主瓣宽度为代价来降低旁瓣。凯塞窗则可自由选择主瓣宽度和旁瓣衰减，如图。

$$w(n) = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left[1 - 2n/(N-1)\right]^2}\right)}{I_0(\beta)} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

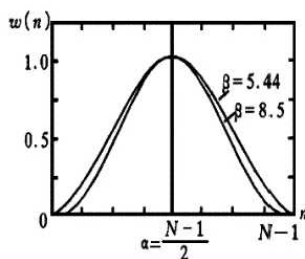


图4.5 凯塞窗函数

式中 $I_0(x)$ 是零阶贝塞尔函数，参数 β 可自由选择，决定主瓣宽度与旁瓣衰减。 β 越大， $w(n)$ 窗越窄，其频谱的主瓣变宽，旁瓣变小。

一般取 $4 < \beta < 9$,

- $\beta = 5.44$ 接近汉明
- $\beta = 8.5$ 接近布莱克曼
- $\beta = 0$ 为矩形。

我们以一个截止频率为 ω_c 的线性相位理想低通滤波器为例来讨论 FIR 的设计问题。

- 1) 求 $h(n)$

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

设低通滤波器的时延为 α ，即

$$\text{则 } h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega n} e^{j\omega \alpha} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}, \text{ 如图。}$$

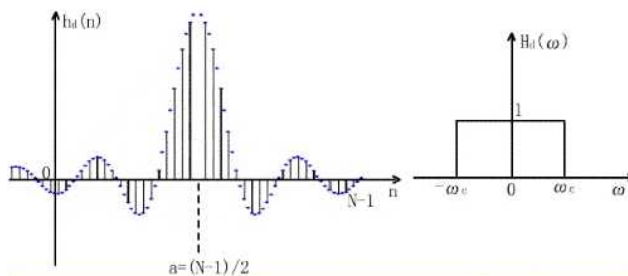


图4.2 理想低通的 $h_d(n)$ 和 $H_d(\omega)$

这是一个以 α 为中心的偶对称的无限长非因果序列，如果截取一段 $n=0 \sim N-1$ 的 $h_d(n)$ 作为 $h(n)$ ，则为了保证所得到的是线性相位 FIR 滤波器，延时 α 应为 $h(n)$ 长度 N 的一半，

$$\alpha = (N-1)/2$$

$$h(n) = h_d(n)W_R(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ 为其它值} \end{cases}, \text{ 其中 } W_R(n) = R_N(n).$$

2) 计算 $H(e^{-j\omega})$

设 $W(e^{j\omega})$ 为该窗口函数的频谱：

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w_R(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

用幅度函数和相位函数表示，则有 $W(e^{j\omega}) = W_R(\omega)e^{-j\omega(N-1)/2}$

其线性相位部分 $e^{-j\omega(N-1)/2}$ 表示延时一半长度 $\alpha = (N-1)/2$ ，对频响起作用的是它的幅度函数。

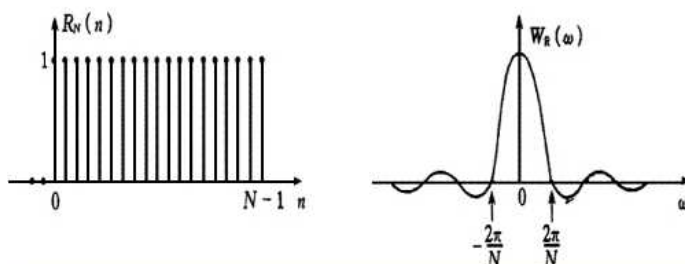


图4.3 矩形窗函数及其幅频函数

理想频响也可以写成幅度函数和相位函数的形式 $H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\omega\alpha}$

$$\text{其中幅度函数为 } H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

两个信号时域乘积对应于频域卷积，所以

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) e^{-j\theta\alpha} W_R(\omega-\theta) e^{-j(\omega-\theta)\alpha} d\theta = e^{-j\omega\alpha} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega-\theta) d\theta \right] \end{aligned}$$

如果也以幅度函数和相位函数来表示 $H(e^{j\omega})$ ， $H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j\omega\alpha}$

则实际 FIR 滤波器的幅度函数 $H(\omega)$ 为 $H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega-\theta) d\theta$

正好是理想滤波器幅度函数与窗函数幅度函数的卷积。

😊 (卷积过程分析, 吉布斯 (Gibbs) 效应, 对窗函数的要求)

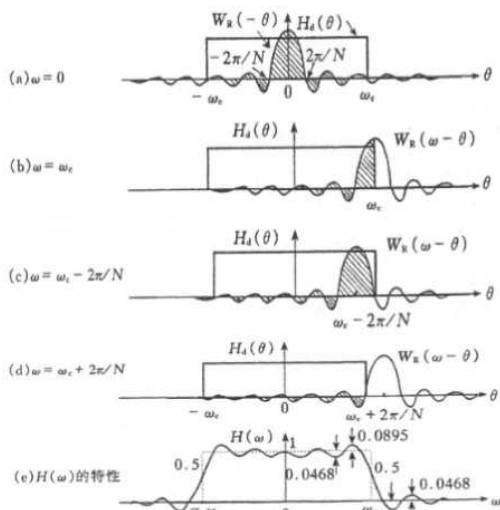


图4.4 矩形窗的卷积过程

卷积过程如图 4.4, 4 个特殊频率点的卷积结果如下:

(1) $\omega=0$ 的响应。一般 $\omega_c \gg 2\pi/N$, 故 $W_R(\omega)$ 在 $[-\omega_c, \omega_c]$ 内近似包含全频域的值, 所以, $H(0) \approx H_d(0)$;

(2) $\omega=\omega_c$ 时, 频谱有一半重叠, 故 $H(\omega_c)/H(0)=0.5$;

(3) $\omega=\omega_c-2\pi/N$ 时, 第一旁瓣 (负的) 在通带外, 出现正肩峰;

(4) $\omega=\omega_c+2\pi/N$ 时, 第一旁瓣 (负的) 在通带内, 出现负肩峰。

加窗对理想频响的影响:

① 使理想频响不连续边沿加宽, 形成过渡带, 过渡带的宽度等于 $W_R(\omega)$ 的主瓣宽度, 与 N 成反比。

② 过渡带两旁产生肩峰和余振。肩峰和余振的大小取决于 $W_R(\omega)$ 的付瓣, 付瓣多, 余振多; 付瓣

相对值大, 余振强。与 N 无关。

③ 因
$$W_R(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \approx N \frac{\sin(N\omega/2)}{N\omega/2} = N \frac{\sin x}{x}$$

其中 $x=N\omega/2$, 所以 N 的改变不影响主瓣与旁瓣的比例关系, 最多只能改变 $W_R(\omega)$ 的绝对值大小和起伏的密度。当 N 增加时, $W_R(\omega)$ 的幅值变大, 频率轴变密, 而最大肩峰经计算可知始终为 8.95%, 这种现象称为吉布斯 (Gibbs) 效应。

肩峰值的大小决定了滤波器通带的平稳程度和阻带的衰减, 对滤波器的性能有很大的影响。



为了改善滤波器的特性, 必须改变窗函数的形状, 窗函数要满足以下两点要求:

- ① 窗谱主瓣宽度要窄, 以获得较陡的过渡带;
- ② 相对于主瓣幅度, 旁瓣要尽可能小, 使能量尽量集中在主瓣中, 这样就可以减小肩峰和余振, 以提高阻带衰减和通带平稳性。

但实际上这两点不能兼得, 一般总是通过增加主瓣宽度来换取对旁瓣的抑制。



四种窗函数的比较

四种窗函数的时域波形如图 4.6, 幅度谱如图 4.7, 用四种窗函数所设计的滤波器的频响特性如图 4.8。

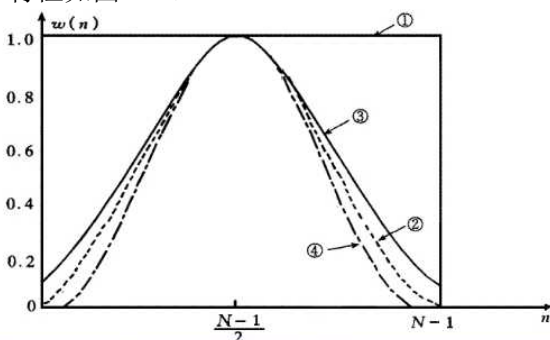


图4.6 四种常用的窗函数

(1) 矩形窗 (2) 汉宁窗 (3) 汉明窗 (4) 布莱克曼窗

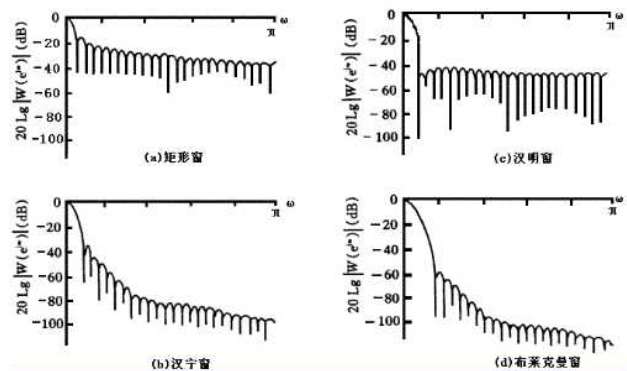


图4.7 四种窗函数的频谱

从 (a) \rightarrow (d), 旁瓣的衰减逐步增加, 主瓣相应加宽。

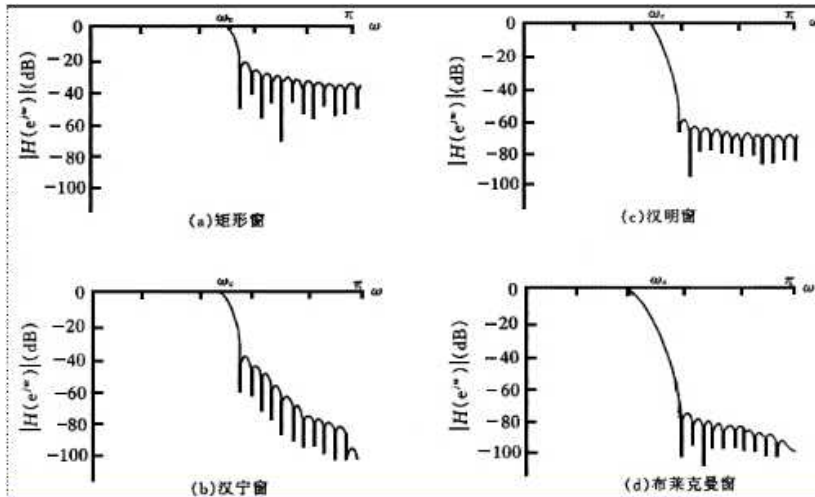


图4.8 四种窗口在统一指标下设计的滤波器的频率特性

($N=51$, $\omega_c=0.8\pi$)

可见，用矩形窗设计的滤波器过渡带最窄，但阻带最小衰减也最小，仅-21dB；布莱克曼窗设计的阻带最小衰减最大，达-74dB，但过渡带最宽，约为矩形窗的三倍。

除了上述窗口外，还有所谓的“组构窗口”，即由一些简单的窗函数组合构成，如常见的三角形窗（Bartlett 窗）

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

它是由二个长度为 $\frac{N}{2}$ 的矩形窗进行线性卷积而成的。

窗口设计法的主要工作是计算 $h_d(n)$ 和 $w(n)$ ，但当 $H_d(e^{j\omega})$ 较为复杂时， $h_d(n)$ 就不容易由反付里叶变换求得。这时一般可用离散付里叶变换代替连续付里叶变换，求得近似值：

$$\text{令 } h_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_d(k) e^{j2\pi kn/M} \quad \text{而} \quad H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{M}}$$

当 $M \gg N$ 时，就可使 $h_M(n) \approx h_d(n)$ 。

小结：

窗口法的优点是简单，有闭合的公式可用，性能及参数都有表格资料可查，计算程序简单，较为实用。缺点是当 $H_d(e^{j\omega})$ 较为复杂时， $h_d(n)$ 不容易由反付里叶变换求得。边界频率因为加窗的影响而不易控制。

第五章 第三节内容：

5-3 频率取样法

(基本思想,设计方法,约束条件,逼近误差)

工程上，常给定频域上的技术指标，所以采用频域设计更直接。

基本思想

使所设计的 FIR 数字滤波器的频率特性在某些离散频率点上的值准确地等于所需滤波器在这些频率点处的值，在其它频率处的特性则有较好的逼近。

$$\text{确定 } H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{频率取样}} H_d\left(e^{j\frac{2\pi k}{M}}\right) = H_d(k) \xrightarrow[\text{插值}]{\text{IDFT}} h(n) \xrightarrow[\text{不等于 } H_d(\omega)]{} H(e^{j\omega})$$

2 设计方法

- 1) 确定 H_k, θ_k
$$H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2k\pi}{N}} = H(k) = H_k e^{j\theta_k}$$
- 2) 计算 $h(n)$
$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi nk/N}$$
- 3) 计算 $H(z)$
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

3 约束条件

为了设计线性相位的 FIR 滤波器，采样值 $H(k)$ 要满足一定的约束条件。

前已指出，具有线性相位的 FIR 滤波器，其单位采样响应 $h(n)$ 是实序列，且满足 $h(n) = \pm h(N-1-n)$ ，由此得到的幅频和相频特性，就是对 $H(k)$ 的约束。（链接表 4.1）。

例如，要设计第一类线性相位 FIR 滤波器，即 N 为奇数， $h(n)$ 偶对称，则 $H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$

幅度函数 $H(\omega)$ 应具有偶对称性： $H(\omega) = H(2\pi - \omega)$

令 $H(k) = H_k e^{j\theta_k}$ ，由此可得， $\theta_k = -\frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N-1}{2} \right) = -k\pi(1-1/N)$

$H_k = H_{N-k}$ （满足对称性）。

同样，若要设计第二类线性相位 FIR 滤波器， N 为偶数， $h(n)$ 偶对称，相位关系同上，由于幅度特性是奇对称的， $H(\omega) = -H(2\pi - \omega)$

因此， H_k 也必须满足对称要求： $H_k = -H_{N-k}$

其它两种线性相位 FIR 数字滤波器的设计，同样也要满足幅度与相位的约束条件。

4 设计误差

设计步骤： $\theta_k, H_k \rightarrow H(k) \rightarrow H(e^{j\omega})$

问题：上述设计过程得到的 $H(e^{j\omega})$ 与 $H(k)$ 的逼近程度，以及 $H(e^{j\omega})$ 与 $H(k)$ 的关系？

推导：

因
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi nk/N} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi nk/N} z^{-n} \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1-z^{-N}}{1-e^{j2\pi k/N} z^{-1}}$$

令 $w = e^{-j2\pi k/N}$ ，则
$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-w^k z^{-1}}$$

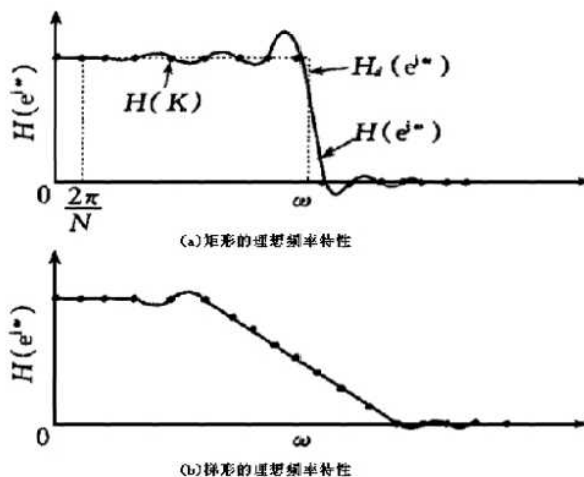
单位圆上的频响为：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-e^{j2\pi k/N} e^{-j\omega}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) \sin(\omega N/2)}{\sin[(\omega - 2\pi k/N)/2]} e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega - \frac{2\pi k}{N})} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \phi_k(e^{j\omega})$$

这是一个内插公式，式中

$$\phi_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin[(\omega - 2\pi k/N)/2]} e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega - \frac{2\pi k}{N})} \quad \text{为内插函数。}$$

令 $\omega = \frac{2\pi}{N} i$ ， $i = 0, 1, \dots, N-1$ ，则
$$\phi_k(e^{j\frac{2\pi}{N} i}) = \begin{cases} 1 & k=i \\ 0 & k \neq i \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$



可见，在每个采样点上，频响 $H(e^{j\omega})$ 严格地与理想特性 $H(k)$ 一致，在采样点之间，频响由各采样点的内插函数延伸迭加而形成，因而有一定的逼近误差，误差大小与理想频率响应的曲线形状有关，理想特性平滑，则误差小；反之，误差大，在理想频率响应的不连续点会产生肩峰和波纹，如图。 N 增加，采样点变密，逼近误差减小。

 例：设计一个 FIR 数字滤波器，其理想特性为

图 4.9 频率采样的响应

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq 0.5\pi \\ 0 & 0.5\pi \leq \omega \leq \pi \end{cases}, \text{ 采样点数 } N=33, \text{ 要求线性相位。}$$

解：根据表 4.1，能设计低通线性相位数字滤波器的只有 1、2 两种，因 N 为奇数，所以只能选择第一种。即幅频特性对应 π 偶对称，也即 H_k 偶对称，则应有 $h(n) = h(N-1-n)$ 。

根据指标要求，在 $0 \sim 2\pi$ 内有 33 个取样点，所以第 k 点对应频率为 $\frac{2\pi k}{33}$ ，而截止频率 0.5π 介于 $\frac{2\pi}{33} \times 8$ 和 $\frac{2\pi}{33} \times 9$ 之间，所以 $k=0 \sim 8$ 时取样值为 1，根据对称性， $k=25 \sim 32$ 时取样值也为 1，因 $k=33$ 为下一周期，所以 $0 \sim \pi$ 段比 $\pi \sim 2\pi$ 段多一个点，第 0 点与第 33 点对称，第 8 点与第 25 点对称。故

$$\begin{cases} H_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \sim 8; 25 \sim 32 \\ 0 & k = 9 \sim 24 \end{cases} \\ \theta_k = -\omega \left(\frac{N-1}{2} \right) = -\frac{32k}{33} \pi \end{cases}$$

将 $H(k) = H_k e^{j\theta_k}$ 代入内插公式，求 $H(e^{j\omega})$ ：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_k \sin(\omega N/2)}{\sin[(\omega - 2\pi k/N)/2]} e^{-j\frac{32k}{33} \pi} e^{-j\left(\frac{16\omega - k\pi}{N}\right)} = \frac{1}{33} \left\{ \sum_{k=0}^{32} \frac{H_k \sin \left[33 \left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{33} \right) \right]}{\sin \left[(\omega - 2\pi k/33)/2 \right]} \right\} e^{-j\omega \cdot 16}$$

考虑到 $8 < k < 25$ 时， $H_k=0$ ，而其它 k 时， $H_k=1$ ，令 $k=33-n$ ，因

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{32} \frac{H_k \sin \left[33 \left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{33} \right) \right]}{\sin \left[(\omega - 2\pi k/33)/2 \right]} &= \sum_{n=1}^{32} \frac{\sin \left[33 \left(\frac{\omega}{2} - \frac{(33-n)\pi}{33} \right) \right]}{\sin \left[\frac{\omega - \pi(33-n)}{33} \right]} = \sum_{n=1}^{32} \frac{\sin \left[33 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{33} - \pi \right) \right]}{\sin \left[\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{33} - \pi \right]} = \sum_{k=1}^{32} \frac{\sin \left[33 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{33} \right) \right]}{\sin \left[\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{33} \right]} \\ \therefore H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{33} \left\{ \frac{\sin \left(\frac{33\omega}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\omega}{2} \right)} + \sum_{k=1}^{32} \left[\frac{\sin \left[33 \left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{33} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{33} \right)} + \frac{\sin \left[33 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{33} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{33} \right)} \right] \right\} \end{aligned}$$

此式计算的 $H(e^{j\omega})$ 幅频特性如图

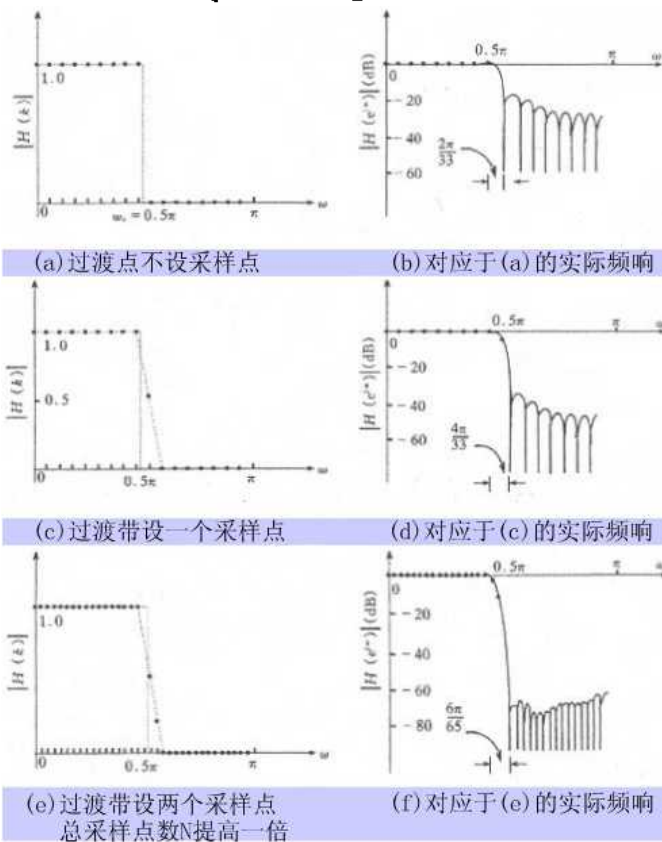


图 4.10 过渡带采样点不同的三个 FIR 滤波器的设计

4.10，从图上可以看出，其过渡带宽为一个频率采样点 $2\pi/33$ ，而最小阻带衰减略小于 20dB。

对大多数应用场合，这样小的滤波器阻带衰减的是不能令人满意的。

改善阻带衰减的方法

改善阻带衰减的一种办法是加宽过渡带宽，以牺牲过渡带换取阻带衰减的增加。

例如，在本例中可在 $k=9$ 和 $k=24$ 处设一过渡带取样点 $H_9=H_{24}=0.5$ ，使过渡带增加到两个频率采样点 $4\pi/33$ ，重新计算的 $H(e^{j\omega})$ 见图 4.10(c)，其阻带衰减增加到约 40dB。

根据 $H(e^{j\omega})$ 的表达式， $H(e^{j\omega})$ 是 H_k 的线性函数，因此还可以利用线性最优化改变过渡带的取值，得到要求的滤波器的最佳逼近，而不是盲目地给过渡带设一个值。

例如，本例中可以用简单的梯度搜索法来选择 H_0 、 H_{24} ，使通带或阻带内的最大绝对误差值最小化。即最小衰减达到最大，计算得 $H_0=0.3904$ ，与 $H_0=0.5$ 时相比，这时阻带衰减大大改善。如果还想进一步改善阻带衰减，可以加宽过渡区，添上第二个甚至第三个不等于 0 的频率取样，当然也可用线性最优化求取这些取样值。

如果要进一步增加阻带衰减，又不增加过渡带宽，**另一个办法是增加采样点数 N** ，例如，同样截止频率 $\omega_c=0.5$ ，以 $N=65$ 采样，并在 $k=17$ 和 $k=48$ 插入按阻带衰减最优化计算得到的采样值 $H_{17}=H_{48}=0.5886$ ，在 $k=18$ 和 $k=47$ 处插入经阻带衰减最优化计算获得的采样值 $H_{17}=H_{48}=0.1065$ 。这时过渡带为 $6\pi/65$ ，小于 33 点采样时过渡带插一个采样点时的过渡带宽 $\frac{4\pi}{33}$ ，但其阻带衰减增加了 20 多分贝，当然，其代价是滤波器阶数增加，因而增加了运算量。

小结：

- ① 频率采样设计法直接从频域进行设计，物理概念清楚，直观方便；
- ② 频率采样设计法对于频率响应只有少数几个非零取样值的窄带选频滤波器特别有效。典型应用：用一串窄带滤波器组成多卜勒雷达接收机，覆盖不同的频段，多卜勒频偏可反映被测目标的运动速度。
- ③ 由于通带取 1，阻带取 0 及过渡区取样点的位置都局限在 $2\pi/N$ 的整数倍点上，所以在指定通带和阻带截止频率时，这种方法要受到限制，比较死板；
- ④ 只要充分加大 N ，就可以接近任何给定的频率，克服以上问题，不过复杂性增加，这是一种低效能的方法

第六章 第一节内容：

第六章 数字滤波器的基本结构

- 数字滤波器结构的表示方法
- 无限长单位冲激响应 (IIR) 滤波器的基本结构
- 有限长单位冲激响应 (FIR) 滤波器的基本结构

学习要求：掌握数字滤波器结构流图的表示方法；了解各种滤波器结构的特点。

6-1 数字滤波器结构的表示方法



数字网络的信号流图表示

差分方程中数字滤波器的基本操作：

- ①加法，②乘法，③延迟。

为了简单，通常用信号流图来表示其运算结构。对于加法、乘系数及延迟这三种基本运算，其方框图和信号流图的表示形式如图 5.1。

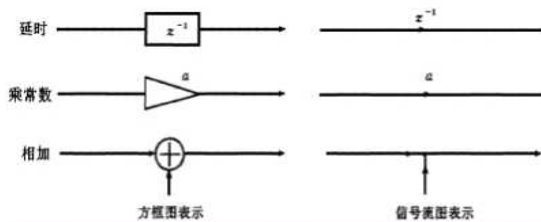


图5.1 运算过程的信号流图表示

例：一阶数字滤波器， $y(n) = a_0 x(n) + a_1 x_{[n-1]} + b_1 y_{[n-1]}$ 其方框图和信号流图表示如图 5.2 和图 5.3。

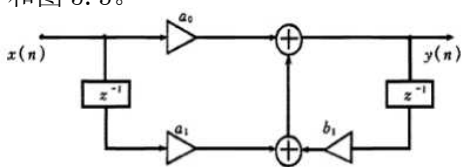


图5.2 一阶数字滤波器的结构方框图

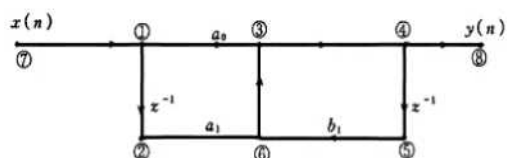


图5.3 一阶数字滤波器结构的信号流图表示

实际上，信号流图是由许多节点和各节点间的定向支路连成的网络。从上面的流图可以很清楚地看到每个节点上的信号值。节点的信号值也称为节点变量或节点状态。图 5.3 中有 8 个节点，每个节点的状态分别为：

- ① $x(n)$
- ② $x(n-1)$
- ③ $a_0x(n) + a_1x(n-1) + b_1y(n-1)$
- ④ = ③
- ⑤ $y(n-1)$
- ⑥ $a_1x(n-1) + b_1y(n-1)$
- ⑦ 输入节点（源点） $x(n)$
- ⑧ 输出节点（阱点） $y(n) = ③$



信号流图的转置定理：

对于单个输入、单个输出的系统，通过反转网络中的全部支路的方向，并且将其输入和输出互换，得出的流图具有与原始流图同样的传递函数。

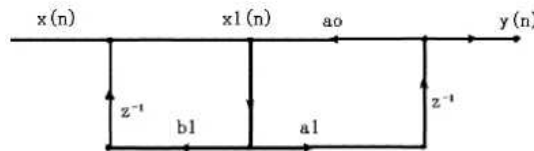


图5.4 信号流图5.3的转置形式

信号流图转置的作用：

- ① 转变运算结构；
- ② 验证由流图计算的传递函数正确与否。

运算结构对滤波器的实现很重要，尤其对于一些定点运算的处理机，结构的不同将会影响系统的精度、误差、稳定性、经济性以及运算速度等许多重要的性能。对于无限长单位冲激响应(IIR)数字滤波器与有限长单位冲激响应(FIR)数字滤波器，它们在结构上各有自己不同的特点，下面将分别加以讨论。

5-2 IIR 数字滤波器的结构

IIR 数字滤波器的结构特点：为递归型结构，存在反馈环路。同一传递函数，有各种不同的结构形式。其主要结构有：😊 (直接型 , 正准型 , 级联型 , 并联型)

(1) 直接型

直接由 **IIR** 数字滤波器的差分方程所得的网络结构。

一个 **N** 阶 **IIR DF** 可用 **N** 阶差分方程描述：
$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N b_i y(n-i)$$

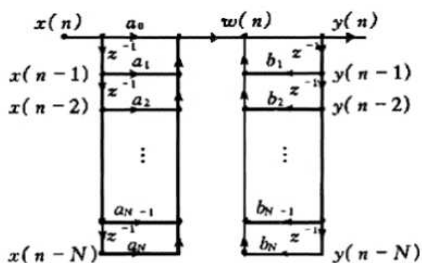


图5.5 直接I型结构

上述结构缺点：

- a) 需要 2^N 个延迟器，太多。
- b) 系数 a_i 、 b_i 对滤波器性能的控制不直接，调整不方便，对极点、零点的控制难，一个 a_i 、 b_i 的改变会影响系统所有零点或极点的分布。
- c) 对字长变化敏感(对 a_i 、 b_i 的准确度要求严格)。
- d) 易不稳定。 阶数高时，上述影响更大。

(2) 正准型（直接 II 型）



上面直接型结构中的两部分可分别看作是两个独立的网络($H_1(z)$ 和 $H_2(z)$)，它们串接构成总的传递函数： $H(z)=H_1(z)H_2(z)$

由传递函数的不变性（系统是线性的），得 $H(z) = H_2(z)H_1(z)$

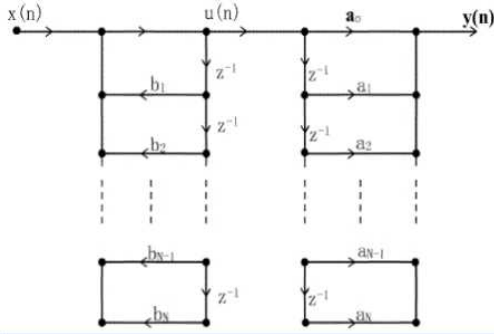


图5.6 直接I型的变形

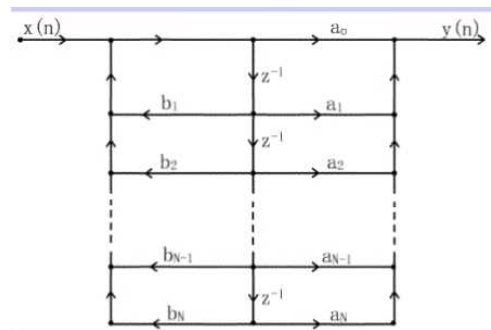


图5.7 直接II型结构

两条延时链中对应的延时单元内容完全相同，可合并，得到直接II型结构，也称为正准型。

优点：延迟线减少一半，变为 N 个，可节省寄存器或存储单元。

缺点：缺点同直接I型。

通常在实际中很少采用上述两种结构实现高阶系统，而是把高阶变成一系列不同组合的低阶系统（一、二阶）来实现。

(3) 级联型（串联）

😊 (结构, 优缺点)

一个 N 阶传递函数可用它的零、极点表示，即把它的分子、分母都表示为因子形式

$$H(z) = \frac{\sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^K (1 - d_i z^{-1})}$$

由于系数 a_i 、 b_i 都是实数，极、零点只有实根和共轭复根，所以有

$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^{M_1} (1 - g_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{M_2} (1 - h_i z^{-1})(1 - h_i^* z^{-1})}{\prod_{i=1}^{K_1} (1 - p_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{K_2} (1 - q_i z^{-1})(1 - q_i^* z^{-1})}$$

其中 g_i 、 p_i 为实根， h_i 、 q_i 为复根，且 $M_1 + 2M_2 = N$ ， $K_1 + 2K_2 = N$

将共轭因子合并为实系数二阶因子，单实根因子看作二阶因子的一个特例，则

$$H(z) = A \prod_{i=1}^M \frac{1 + \alpha_i z^{-1} + \alpha_i^2 z^{-2}}{1 - \beta_i z^{-1} - \beta_i^2 z^{-2}} = A \prod_{i=1}^M H_i(z)$$

其中 α_i 、 β_i 为实系数。

用若干二阶网络级联构成滤波器，二阶子网络称为二阶节，可用正准型结构实现。

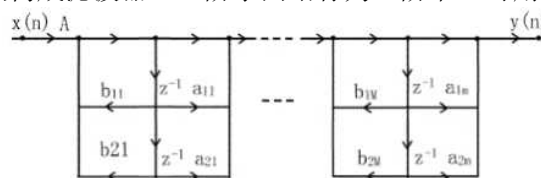


图5.8 级联型结构

优点：

- 简化实现，用一个二阶节，通过变换系数就可实现整个系统；
- 极、零点可单独控制、调整，调整 α_i 、 α_i^2 只单独调整了第 i 对零点，调整 β_i 、 β_i^2 则单独调整了第 i 对极点；
- 各二阶节零、极点的搭配可互换位置，优化组合以减小运算误差；
- 可流水线操作。

缺点：

二阶节电平难控制，电平大易导致溢出，电平小则使信噪比减小。

(4) 并联型

😊 (结构, 优缺点)

将传递函数展开成部分分式之和，可用并联方式构成滤波器。

$$H(z) = \frac{\sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^M b_i z^{-i}} = A_0 + \sum_{i=1}^L \frac{1}{(1 - d_i z^{-1})}$$

将上式中的共轭复根成对地合并为二阶实系数的部分分式，

$$H(z) = A_0 + \sum_{i=1}^L \frac{1}{(1 - p_i z^{-1})} + \sum_{i=1}^M \frac{1 + \gamma_{1i} z^{-1} + \gamma_{2i} z^{-2}}{1 - \beta_{1i} z^{-1} - \beta_{2i} z^{-2}}$$

上式表明，可用一个常数 A_0 L 个一阶网络和 M 个二阶网络 并联组成滤波器 H(z)，结构

如下图：

特点： **优点：**

1)系统 1)实现简单，只需一个二阶节系统通过改变输

2)极点位置可单独调整；

3)运算速度快（可并行进行）；

4)各二阶网络的误差互不影响，总的误差小，对字长要求低。

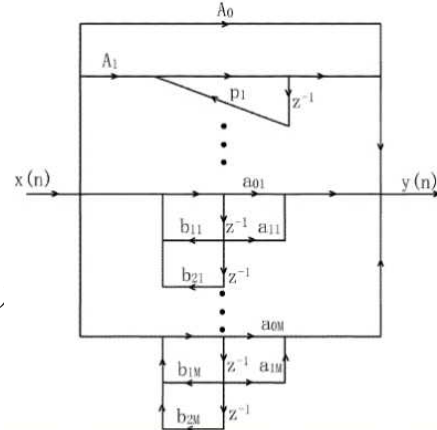


图5.9 并联型结构

缺点：不能直接调整零点，因多个二阶节的零点并不是整个系统函数的零点，当需要准确的传

输零点时，级联型最合适。

FIR 数字滤波器网络结构形式

一、FIR 数字滤波器特点：

主要是非递归结构，无反馈，但在频率采样结构等某些结构中也包含有反馈的递归部分。

它的传递函数和差分方程一般有如下形式：
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i) = \sum_{i=0}^{N-1} h(n-i)x(i)$$

其基本结构有以下几种：[直接型](#)、[级联型](#)、[线性相位型](#)、[频率采样型](#)。😊

(1) 直接型（卷积型、横截型）

直接型也称卷积型或横截型。称为卷积型，是因差分方程是信号的卷积形式；称为横截型，是因为滤波器是一条输入 $x(n)$ 延时链的横向结构。直接由差分方程可画出对应的网络结构：

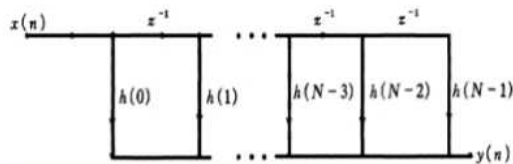


图5.10 FIR滤波器的横截型结构

直接型的转置:

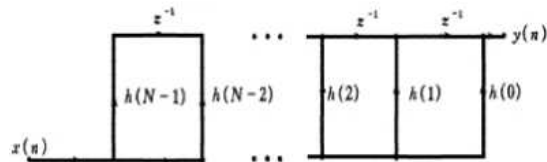


图5.11 横截型的转置结构

(2) 级联型 (串联型)

当需要控制滤波器的传输零点时, 可将传递函数分解为二阶实系数因子的形式:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{i=1}^M (\alpha_{0i} + \alpha_{1i}z^{-1} + \alpha_{2i}z^{-2})$$

于是可用二阶节级联构成:

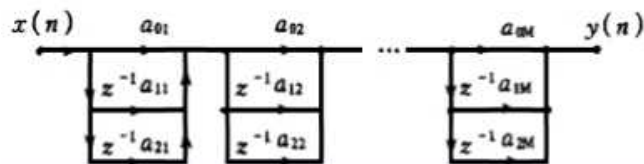


图5.12 级联型结构

每一个二阶节控制一对零点。

缺点: ①所需要的系数比直接型的 $h(n)$ 多;

②乘法运算多于直接型。

(3) 线性相位型

FIR 的重要特点是可设计成具有严格线性相位的滤波器, 此时 $h(n)$ 满足偶对称或奇对称条件。

$$h(n) \text{ 偶对称时, } N \text{ 为偶数, } H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}]$$

$$N \text{ 为奇数, } H(z) =$$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}$$

由上两式, 可得到线性相位 FIR 滤波器的结构, 如图 5.13、图 5.14。

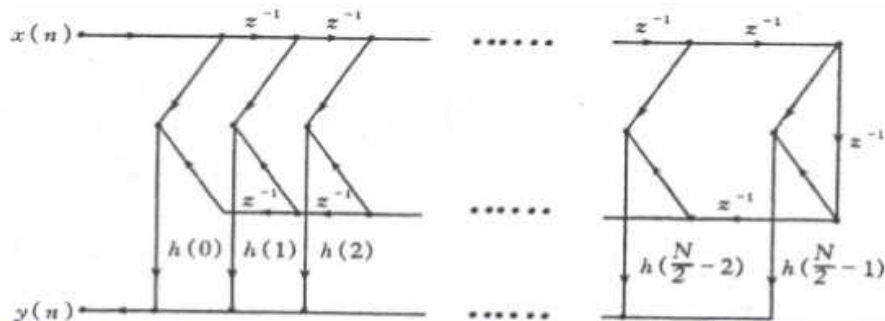


图5.13 N为偶数时的线性相位FIR滤波器结构

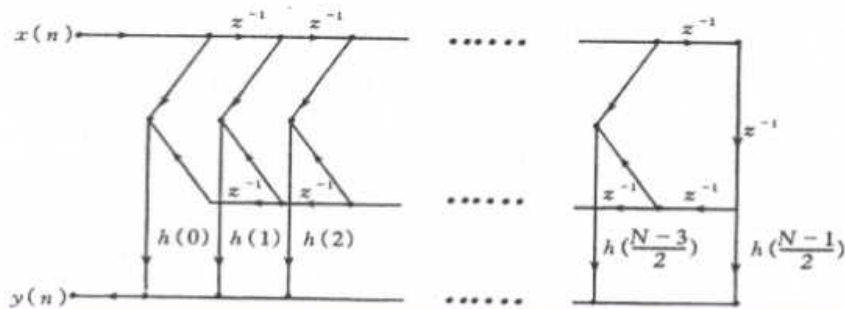


图5.14 N为奇数时的线性相位FIR滤波器结构

线性相位型结构的乘法次数 N 为偶数时，减为 $\frac{N}{2}$ ； N 为奇数时，减为 $\frac{N+1}{2}$ 。而横截型结构乘法次数为 N 次。

(4) 频率采样型

一个有限长序列可以由相同长度频域采样值唯一确定。

现 $h(n)$ 是长度为 N 的序列，因此也可对传递函数 $H(z)$ 在单位圆上作 N 等分采样，这个采样值也就是 $h(n)$ 的离散付里叶变换值 $H(k)$ 。 $H(k) = H(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = DFT[h(n)]$

根据上一章讨论，用频率采样表达 z 函数的内插公式为：

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1}{N} H_c(z) \cdot \left[\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \right]$$

$H(z)$ 由 **FIR** 和 **IIR** 两部分级联而成。

第一部分（**FIR** 部分） $H_c(z) = 1 - z^{-N}$

这是一个由 N 节延时器组成的梳状滤波器，它在单位圆上有 N 个等分的零点：

$$1 - z^{-N} = 0$$

$$z_i = e^{j\frac{2\pi}{N}i}, i = 0, \dots, N-1$$

其频响为

$$H_c(e^{j\omega}) = 1 - e^{-jN\omega}$$

$$|H_c(e^{j\omega})| = 2 \left| \sin\left(\frac{N}{2}\omega\right) \right|, \text{ 如图 5.15.}$$

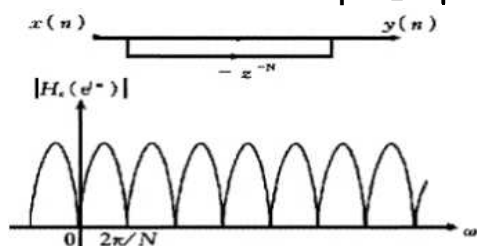


图5.15 $H_c(z)$ 的信号流图和频响

第二部分（**IIR** 部分）是一组并联的一阶网络： $H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$

此一阶网络在单位圆上有一个极点： $z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$

该网络在 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 处的频响为 ∞ ，是一个谐振频率为 $\frac{2\pi}{N}k$ 的谐振器。这些并联谐振器

的极点正好各自抵消一个梳状滤波器的零点，从而使这个频率点的响应等于 $H(k)$ 。

两部分级联后，得到频率采样型的总结构，如图 5.16。

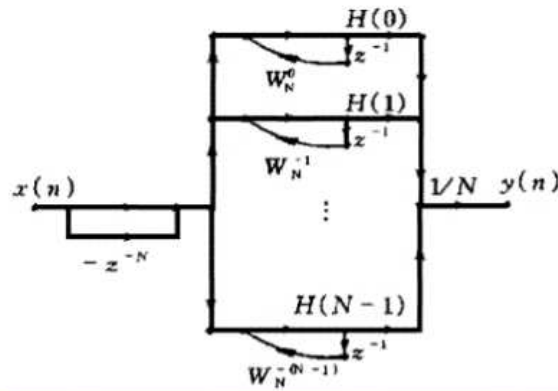


图5.16 频率采样型结构



这一结构的最大特点是它的系数 $H(k)$ 直接就是滤波器在 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 处的响应，因此，控制滤波器的响应很直接。

但它也有两个缺点：

- 所有的系数 W_N^{-k} 和 $H(k)$ 都是复数，计算复杂；
- 系统的稳定性差。因所有谐振器的极点都在单位圆上，考虑到系数量化的影响，有些极点实际上不能与梳状滤波器的零点相抵消，使系统的稳定性变差。

但改进型的频率采样型结构可克服上述缺点。

改进型的频率采样型结构

为了克服一般频率采样型结构的缺点，作了两点改进。

- 将极点、零点移到半径为 r (r 小于 1) 的圆上，频率采样点也修正到半径为 r 的圆上，以解决系统的稳定性问题；
- 将一阶子网络的复共轭对合并成实系数的二阶子网络。

这时，
$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}}$$

为了使系数为实数，将共轭复根合并，利用共轭复根的对称性，有 $W_N^{-(N-k)} = W_N^k = (W_N^{-k})^*$ 同样，因 $h(m)$ 是实数，其 DFT 也是圆周共轭对称的，即 $H(N-k) = H^*(k)$ 因此可将第 k 个及第 $N-k$ 个谐振器合并为一个二阶网络

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - r W_N^{-(N-k)} z^{-1}}$$

$$= \frac{H(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}} + \frac{H^*(k)}{1 - r (W_N^{-k})^* z^{-1}}$$

$$= \frac{\alpha_{0k} + \alpha_{1k} z^{-1}}{1 - z^{-1} 2r \cos(\frac{2\pi}{N}k) + r^2 z^{-2}}$$

其中 $\alpha_{0k} = 2\text{Re}[H(k)]$
 $\alpha_{1k} = -2r \text{Re}[H(k) W_N^k]$

这个二端网络是一个有限 Q 值的谐振器，谐振器频率为 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ 。除了共轭极点外，还有实数极点，分两种情况：

- 当 N 为偶数时，有一对实数极点 $z = \pm r$ ，对应于两个一阶网络：

$$H_0(z) = \frac{H(0)}{1 - rz^{-1}}, \quad H_{\frac{N}{2}}(z) = \frac{H(\frac{N}{2})}{1 + rz^{-1}}$$

这时，
$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[H_0(z) + H_{\frac{N}{2}}(z) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} H_k(z) \right]$$

频率采样型结构如图 5.18，其中三种内部子网络如图 5.17。所有子网络都是递归型结构。

当 N 为奇数时，

只有一个实数极点 $z=r$ ，对应一个一阶网络 $H_0(z)$ 。

这时，

$$H(z) = (1-r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[H_0(z) + \sum_{k=1}^{N/2} H_k(z) \right]$$

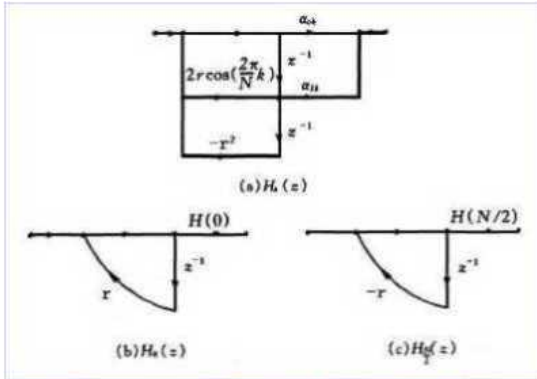


图5.17 三种实系数子网络结构

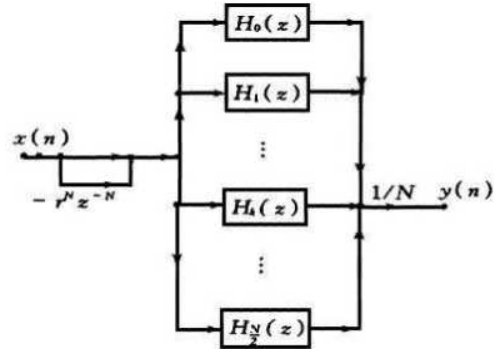


图5.18 N 为偶数时的频率采样型结构



频率采样型结构小结：

优点：

- ①选频性好，适于窄带滤波，这时大部分 $H(k)$ 为零，只有较少的二阶子网络；
- ②不同的 FIR 滤波器，若长度相同，可通过改变系数用同一个网络实现；
- ③ 复用性好。

缺点： 结构复杂，采用的存储器多。

(5) FFT 快速算法（链接快速卷积、分段滤波）

卷积滤波可利用 FFT，通过快速卷积来实现。

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i)$$

$$Y(k) = X(k)H(k)$$

$$y(n) = \text{IFFT}(Y(k))$$