第五章　统计推断

Statistical Inference

张爱莲

新疆大学生命科学与技术学院　新疆生物资源基因工程重点实验室

zalxju@gmail. com

20100909

课前复习

- 研究概率分布的目的
- 概率分布
- 随机变量，类型及各自的特点
- 离散型随机变量的概率分布的研究方法?

本章内容

5.1 统计推断的基本原理

5.2 单个样本的差异显著性检验

5.3 两个样本的差异显著性检验

5.4 百分数资料差异显著性检验

本章要点

- 了解显著性检验的意义.
- 掌握显著性检验基本原理，基本步骤.
- 了解显著水平与两种类型的错误.
- 掌握几种常用的t检验方法.

统计推断的概念与内容

- **统计推断(statistical inference)的定义：**

  是根据样本和假定模型对总体作出的以概率形式表述的推断。

- **统计推断的内容：**

  假设检验 （ test of hypothesis）

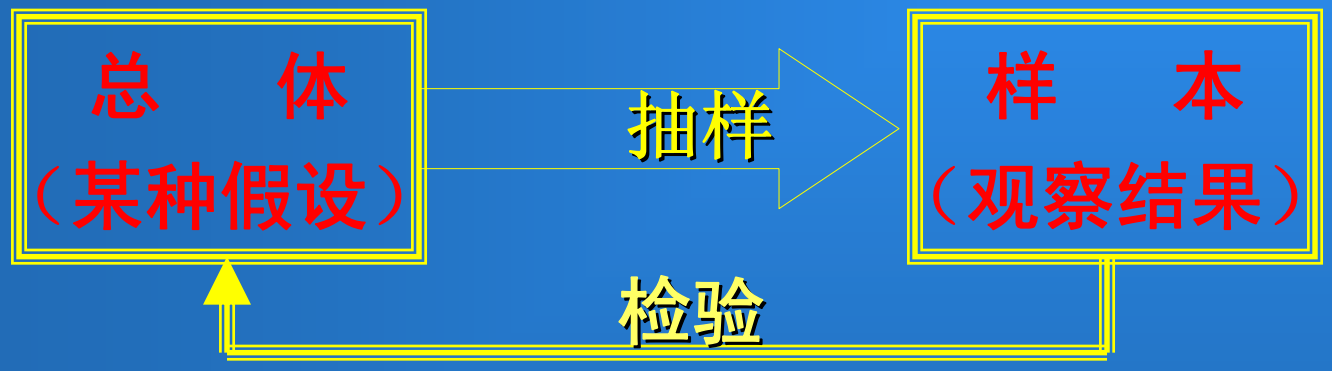
  参数估计（parametric estimation）

假设检验

- 基本思想
- 检验规则
- 检验步骤
- 常见的假设检验

基本思想

•小概率原理：如果对总体的某种假设是真实的，那么不利于或不能支持这一假设的事件A（小概率事件）在一次试验中几乎不可能发生的；要是在一次试验中A竟然发生了，就有理由怀疑该假设的真实性，拒绝这一假设。



（接受）　　（拒绝）

小概率事件未发生　　小概率事件发 生

5.1 统计推断的基本原理

5.1.1 显著性检验的意义与基本思想

一、显著性检验的意义

1）什么是显著性检验？

对总体作一假设根据样本做出接受或否定的判断。

2）显著性检验的目的与对象：

目的：总体平均数；对象：样本平均数

3）为什么进行显著性检验：

$$\bar{x} = \mu + \bar{\varepsilon}$$

二、 显著性检验的基本思想

具有概率性质的反证法：

- 第一作假设；
- 第二，做一次试验并根据假设成立计算某统计量的值；
- 第三，根据统计量的实测值是否为小概率事件判断假设是否成立。

【例】随机抽测10只长白兔和10只大白兔经产母兔的产仔数，资料如下：

长白：11，11，9，12，10，13，13，8，10，13

大白： 8， 11，12，10，9， 8 ， 8， 9，10，7

长白兔产仔平均数 $\overline{x}_1$ =11头, 标准差 S_1=1.76头；

大白兔产仔平均数 $\overline{x}_2$=9.2头, 标准差 S_2=1.549头。

Question: 能否仅凭这两个平均数的差值 $\overline{x}_1$- $\overline{x}_2$=1.8头，得出两品种产仔数不同的结论呢？为什么？

以样本平均数作为检验对象的依据：

1、离均差的平方和Σ（$x_i - \bar{x}$）^{2}最小。说明样本平均数与样本各个观测值x最接近，平均数是资料的代表数。

2、$\bar{x}$ 是总体平均数的无偏估计值，即E（$\bar{x}$）$=\mu$。

3、根据中心极限定理，样本平均数服从或逼近正态分布。

- 一方面我们有依据由样本平均数 $\bar{x}$ 来推断总体平均数 μ，
- 另一方面又不能仅据样本平均数表面上的差异直接作出结论.
- 统计学认为，这样下结论不可靠，其根本原因在于试验误差（或抽样误差）的不可避免性。

1. 由于抽样误差的随机性，再次抽样两样本平均数就不一定是11头和9.2头，其差值也不一定是1.8头。

2. 造成这种差异可能有两种原因，一是品种造成的差异，另一可能是试验误差（或抽样误差）。

- 对两个样本进行比较时：

  必须判断样本间差异是抽样误差造成的，还是本质不同引起的。

Question: 1. 如何区分两类性质的差异?

- 通过试验得到的每个观测值 x_i ，既由所属总体的特征决定，又受个体差异和诸多随机因素影响。所以观测值 x_i 由两部分组成，即

$$x_i = \mu + \varepsilon_i$$

- n 个观测值的样本平均数：

$$\bar{x} = \sum x_i / n = \sum (\mu + \varepsilon_i) / n = \mu + \bar{\varepsilon}$$

说明样本平均数并非总体平均数，它还包含试验误差成分。它只是试验的表面效应。

Question: 2. 怎样通过样本来推断总体？

- 仅凭 $\bar{x}$ 就对总体平均数下结论是不可靠的。只有通 过 对 $\bar{x}$ 显著性检验才能得出结论。

- 对 $\bar{x}$ 进行显著性检验就是要分析：

  试验的表面效应主要由处理效应引起的，还是主要由试验误差所造成。

【例】某地区的当地小麦品种一般亩产300斤，从多年的种植结果知道其标准差75斤。现有一个新品种，通过25个小区的试验，计算其平均亩产为330斤。

问：新品种的产量是否高于当地品种？为什么？

5.1.2 显著性检验的基本步骤

1. 做出无效假设

2. 研究抽样分布，求出统计量如：u,t,F,χ^2等

3. 选定显著水平α（小概率标准）

4. 与临界值U_α比较，做出统计推断

1. 首先对试验样本所在的总体作假设

- 零假设（无效假设 null hypothesis）
- 备择假设或对应假设(alternative hypothesis)

零假设（无效假设 null hypothesis）

1. 用“H_0“来表示。本例中H_0 : $\mu = \mu_0 = 300$

   假设总体参数与某一指定值相等，或者说就是假设处理无效

2. 一般的表达式为：

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{或} \mu - \mu_0 = 0$$

3. 含义：

   实得差异是由于误差引起的,这种假设称为无效假设.

备择假设或对应假设(alternative hypothesis)

1. 用“H_A”来表示。本例的H_A: $\mu > \mu_0 > 300$

其实就是假设药剂有效，或者新品种确实高产。

2. 记作: H_A: $\mu > \mu_0$， H_A : $\mu < \mu_0$ ， H_A: $\mu \neq \mu_0$

3. 含义:

也就是说实得差异不是由误差引起的，而是真正存在的差异。

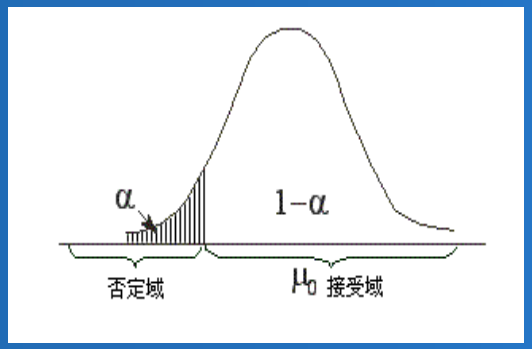
2. 在上述零假设是正确的假定下，分析统计量的抽样分布， 计算H_0发生的概率。

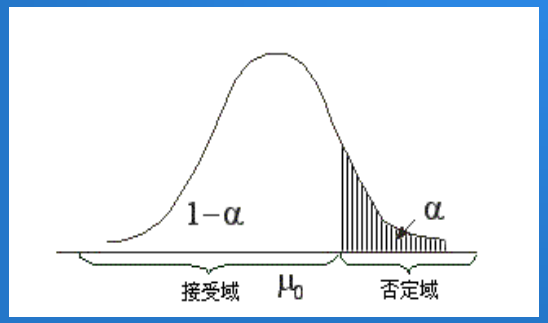
- 本例中：H_0 : $\mu = \mu_0 = 300$ 斤， H_A: $\mu > \mu_0$
- 在零假设下可知 $\bar{x}$ 是抽自当地小麦品种的随机样本，根据抽样分布，可知 $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

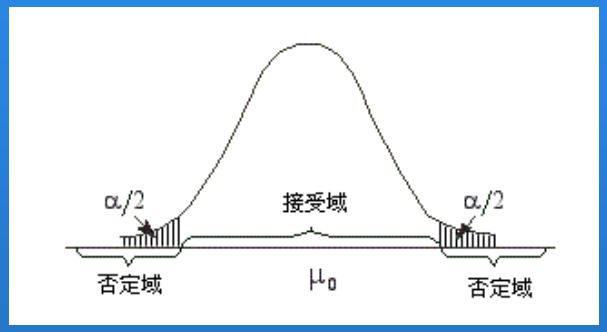
$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{330 - 300}{\frac{75}{\sqrt{25}}} = 2$$

3. 选定显著水平，确定临界值。

- 显著水平：用来确定否定或接受无效假设的概率标准叫显著水平（α）。
- 0.05或0.01叫做显著水平。α小、则显著水平高。







α=0.05，查表$u_{0.05}$=1.645， $u_{\frac{0.05}{2}} =$

α=0.01，查表$u_{0.01}$=1.645 $u_{\frac{0.01}{2}} =$

单侧检验（one-sided test）与双侧检验（two-sided test）

- $H_A: \mu > \mu_0$, $H_A: \mu < \mu_0$, $H_A: \mu \neq \mu_0$

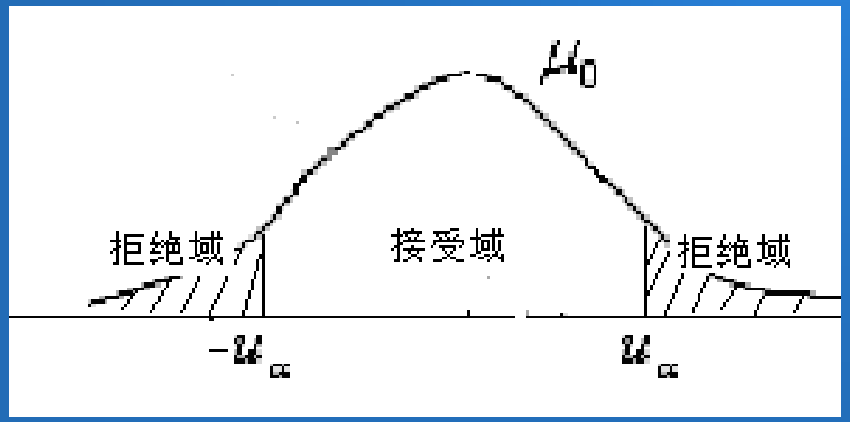
假若问题只要求判断 μ 是否等于μ_0，而不是大于μ_0或小于μ_0时，应做**双侧检验**。

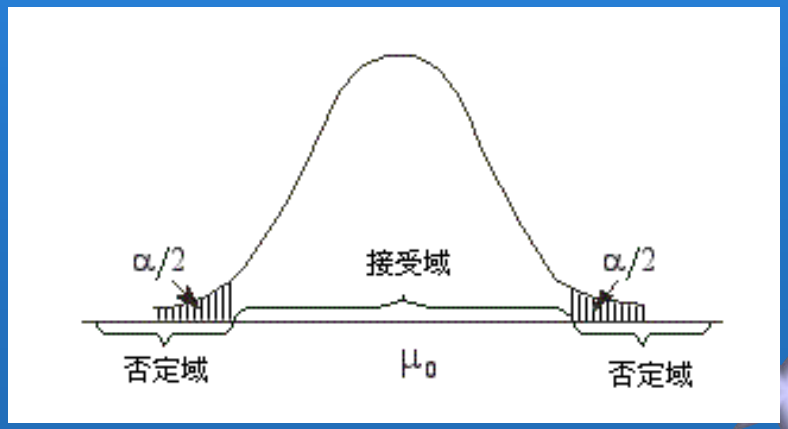
如果事先可以判断 μ 不可能大于μ_0，或 μ 不可能小于μ_0时，则可做**单侧检验**。因单侧检验的辨别力更强些，所以在可能情况下尽量做单侧检验。

单侧检验 $\begin{cases} H_A: \mu > \mu_0 \text{时}, H_0\text{的拒绝域为} u > u_\alpha \quad \text{上侧检验} \\ H_A: \mu < \mu_0 \text{时}, H_0\text{的拒绝 域为} u < -u_\alpha \quad \text{下侧检验} \end{cases}$

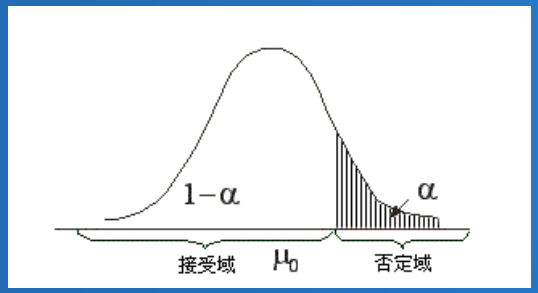
双侧检验

$H_A: \mu \neq \mu_0$时,H_0的拒绝域为$u > u_{\alpha/2}$或$u < -u_{\alpha/2}$ 双侧/双尾检验

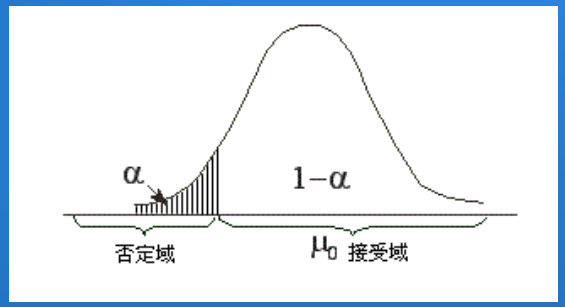




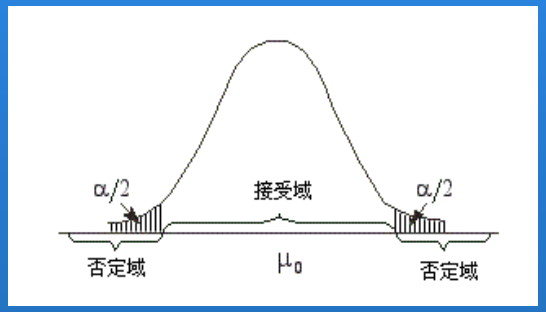
- 单侧测验与双侧测验的方法与步骤非常相似，只是在如何确定小概率事件的边界问题上不同.
- 双侧检验显著，单侧检验一定显著；但单侧检验显著，双侧检验未必显著。



上侧检验



下侧检验

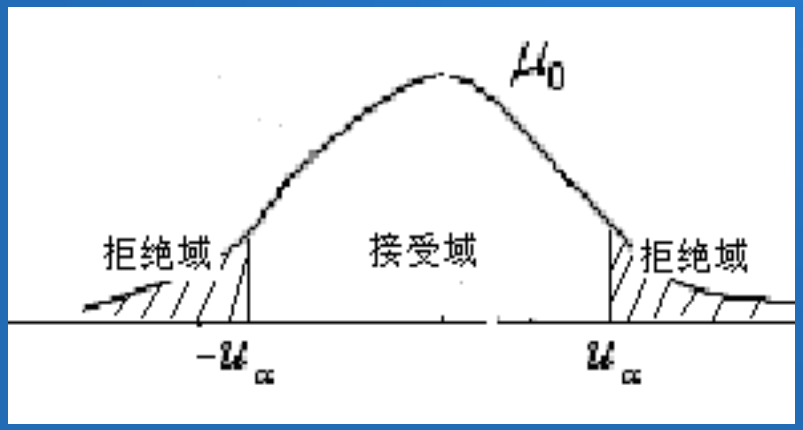


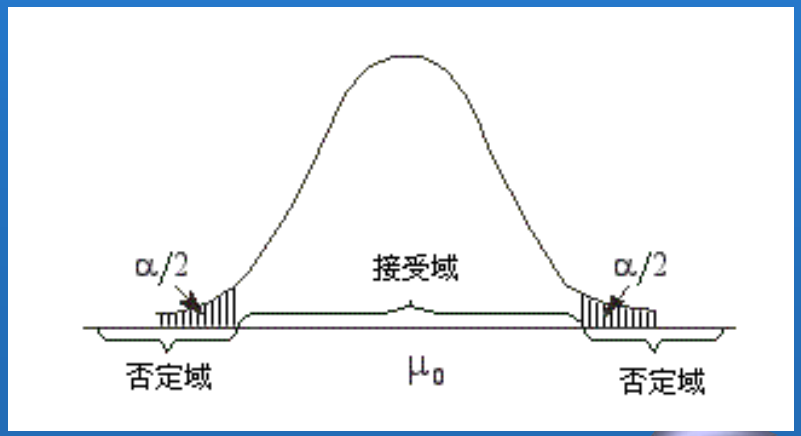
双侧检验

4. 根据“小概率实际不可能性原理”来接受或否定零假设。

取α=0.05, 查表 $u_{0.05}$=1.645, u=2, u >$u_{0.05}$,

- 若$H_{0:}$ $\mu=\mu_0$=300 落入 H_0 的拒绝域, 则认为H_0不可能发生, 拒绝H_0 。即这个小麦品种不是从本地品种中抽取的随机样本，而属于另一个总体。
- 若H_0 落入接受域, 则认为H_0可能发生，接受H_0 。





小 结

统计推断的基本过程

H_A研究总体≠ 对照总体

推 断

推 断

H_o: 研究总体= 对照总体

u值与u_α比较确定Ho的拒绝域

$u>u_\alpha$接受H_A

研究样本是对照总体的随机样本

计算出u值

样本平均数是正态分布

$$\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$$

转化为标准正态分布

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

5.2 单个样本的差异显著性检验

- 抽样总体
- 检验的内容
- 检验的不同条件

需要采用不同的检验统计量，因而有不同的检验方法。

5.2.1 单个样本平均数的差异显著性检验

5.2.2　单个样本变异性的显著性检验－χ^2 检验

5.2.1 单个平均数的差异显著性检验

- 检验一个样本平均数与已知的总体平均数是否有显著差异，即检验该样本是否来自某一总体。
- 已知的总体平均数一般为一些公认的理论数值、经验数值或期望数值。

* 总体σ已知时 - μ 检验
* 总体σ未知知时 - T 检验

一、 总体σ已知时- u检验

1、从σ已知的正态或近似正态总体中抽出含量为n的样本。

2、零假设 H_0： $\mu = \mu_0$

备择假设H_A： ① $\mu > \mu_0$ ② $\mu < \mu_0$ ③ $\mu \neq \mu_0$

3、显著性水平 在α＝0.05水平上拒绝H_0称为差异显著

在α＝0.01水平上拒绝H_0称为差异极显著

4、检验统计量 $u = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

5、相应于2中各备择假设之H_0的拒绝域

① $u > u_\alpha$ ② $u < -u_\alpha$ ③ $|u| > u_{\alpha/2}$

6、得出结论并给予解释

例：从正态总体中抽出样本：-0.2，-0.9，-0.6，0.1，已知σ=1，设 α=0.05，检验该样本是否从μ =0 的总体中随机抽取的？

解：根据检验的基本程序：

1. 从σ已知的正态总体抽样， $\bar{x} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$

$$\bar{x} = -0.4$$

2. H_0: $\mu = \mu_0=0$, H_A: $\mu < \mu_0$

3. $\alpha = 0.05$

4. $$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{-0.4 - 0}{\frac{1}{\sqrt{4}}} = -0.8$$

5. H_0的拒绝域：做下侧检验，当$u < -u_{0.05}$时, 拒绝H_0

查表得 $-u_{0.05} = -1.645$, 而$u = -0.8 > -1.645$

6. 结论：接受H_0 ，拒绝H_A ，此样本是从平均数为0的总体中抽取的随机样本。

二、总体σ未知时– t 检验

1、从σ未知的正态或近似正态总体中抽出含量为n的样本。

2、零假设： H_0： $\mu = \mu_0$

备择假设： H_A： ① $\mu > \mu_0$ ② $\mu < \mu_0$ ③ $\mu \neq \mu_0$

3、显著性水平：在α＝0.05水平上拒绝H_0称为差异显著

在α＝0.01水平上拒绝H_0称为差异极显著

4、检验统计量：当σ未知时以s代替之，标准化的变量称为t，服从$n-1$自由度的t分布。t分布的分位数可从附表4中查出。

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

5、相应于2中各备择假设之H_0的拒绝域：

① $t > t_\alpha$ ② $t < -t_\alpha$ ③ $|t| > t_{\alpha/2}$

6、得出结论并给予解释。

例　已知玉米单交种群单105的平均穗重 μ_0＝300g。喷洒植物生长促进剂后，随机抽取9个果穗，其穗重为：308、305、311、298、315、300、321、294、320g。问喷药后与喷药前的果穗重差异是否显著？

解 ① σ 未知

② 假设：H_0：　μ ＝300

H_A：　$\mu \neq 300$

③ 显著性水平：　α ＝0.05

④ σ 未知，使用 t 检验，

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = 2.49$$

⑤ H_0的拒绝域：

因 H_A： $\mu \neq \mu_0$，故为双侧检验，当$|t|>t_{0.025}$时拒绝H_0。$t_{0.025}=2.306$。

⑥ 结论：

因$|t|>t_{0.025}$，即$P < 0.05$，所以拒绝零假设。喷药前后果穗重的差异是显著的。

若规定α＝0.01，$t_{0.01/2}=3.355$，$t < t_{0.005}$，因此喷药前后果穗重的差异尚未达到“极显著”。

例2　按饲料配方规定，每1000kg某种饲料中维生素C不得少于246g，现从工厂的产品中随机抽测12个样品，测得维生素C含量如下：255 、 260、 262、 248、244、245、 250、 238、 246、 248、 258、270g/1000kg， 问此产品是否符合规定要求？

按题意，此例应采用单侧检验。

1、提出无效假设与备择假设

H_0: $\mu \leq 246$，H_A： $\mu > 246$

2、计算 t 值

经计算得：$\bar{X}=252$，$S=9.115$

所以 $$t=\frac{\bar{x}-\mu}{S_{\bar{x}}}=\frac{252-246}{9.115/\sqrt{12}}=\frac{6}{2.631}=2.284$$

$$df=n-1=12-1=11$$

3、查临界*t*值，作出统计推断

$t_{0.05(11)}$ = 1.796，**t=2.281 > 单侧$t_{0.05}$（11），*P* < 0.05，否定H_0 :μ ≤ 246，接受H_A :μ >246，可以认为该批饲料维生素C含量符合规定要求。**

5.2.2 变异性的显著性检验— χ^2检验

1、从正态总体中随机抽取含量为n的样本，计算出样本s^2。

2、零假设： H_0： $\sigma = \sigma_0$

备择假设：H_A：① $\sigma > \sigma_0$ ② $\sigma < \sigma_0$ ③ $\sigma \neq \sigma_0$

3、显著性水平：在 $\alpha = 0.05$水平上拒绝H_0称为差异显著

在 $\alpha = 0.01$水平上拒绝H_0称为差异极显著

4、检验统计量：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

统计量 χ^2服从$n-1$自由度的 χ^2分布。

5、相应于2中各备择假设之H_0的拒绝域：

① $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$ ② $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$ ③ $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}$ 和 $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}$

6、得出结论并给予解释。

例　一个混杂的小麦品种，株高标准差 σ_0＝14cm，经提纯后随机抽出10株，它们的株高为：90、105、101、95、100、100、101、105、93、97cm，考查提纯后的群体是否比原群体整齐？

解：① μ 未知，对未知总体的方差做检验

② 假设：H_0：$\sigma = \sigma_0 = 14\text{cm}_0$　　H_A：$\sigma < \sigma_0$

③ 显著性水平：在 $\alpha = 0.01$ 水平上做检验

④ 检验统计量：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})}{\sigma_0^2} = \frac{218.1}{14^2} = 1.11$$

⑤ 相应于 H_A：$\sigma < \sigma_0$ 之 H_0 的拒绝域为 $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$，从附表6中可以查出 $\chi^2_{0.99} = 2.09$

⑥ 结论：因 $\chi^2 < \chi^2_{0.99}$，即 $P < 0.01$，所以拒绝 H_0。植株经提纯后变得非常整齐。

5.3 两个样本平均数的差异显著性检验

两个样本平均数的差异显著性检验：

就是由两个样本平均数之差去推断两个样本所属总体平均数有无差异。

- 5.3.1 成组设计平均数的差异显著性检验
- 5.3.2 配对设计平均数的差异显著性检验

5.3.1 成组设计平均数的差异显著性检验

- 如果两个样本所在总体为正态分布，且总体方差σ_1^2和σ_2^2已知时用**U检验**。
- 如果两个样本所在总体为正态分布，虽总体方差未知，但两个样本容量都很大时用**U测验**。
- 如果两个样本所属总体为正态分布，总体方差未知而且样本容量又不大时用**t 测验**.

根据σ_i是否相等，分为
- 成组数据 t 检验
- Aspin-Welch 检验。

一、 σ_i 已知- U 检验

二、 σ_i未知但相等时-成组数据的t检验

三、 σ_i未知且可能不等时—Aspin-Welch检验

成组设计:

两个处理为完全随机设计，试验单位彼此独立，不论其样本容量是否相同，所得数据皆称为成组数据。**以组平均数作为比较的标准。**

处理	观测值 x_{ij}	样本含量 n_i	平均数 $\bar{x}$	总体平均数
1	x_{11} x_{12} … x_{1n_1}	n_1	$\bar{x}_1=\sum x_{1j}/n_1$	μ_1
2	x_{21} x_{22} … x_{2n_2}	n_2	$\bar{x}_2=\sum x_{2j}/n_2$	μ_2

一、 σ_i 已知，两个平均数间差异显著性检验–U检验

1. 假定从两个正态总体或近似正态总体中，独立地抽取含量分别为n_1和n_2的随机样本。

2. H_0: $\mu_1 = \mu_2$, H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$, H_A: $\mu_1 > \mu_2$, H_A: $\mu_1 < \mu_2$,

3. 显著水平： $\alpha=0.05$, $\alpha=0.01$

4. 统计量

$$u = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

其中

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

叫做平均数差数的标准误差。

H_0的拒绝域： 对于 H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$, $|u| > u_{\alpha/2}$

H_A: $\mu_1 > \mu_2$, $u > u_{\alpha}$

H_A: $\mu_1 < \mu_2$, $u < -u_{\alpha}$

例：调查从天山和阿尔泰山采集的朱雀的体长，每一山地采集20只，$\bar{x}_1 = 8.2cm,\quad \bar{x}_2 = 7.9cm,\quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0.6cm$ 问在α=0.05水平上，天山朱雀体长是否显著大于阿尔泰山的朱雀体长？

解：

1.朱雀体长服从正态分布，两个样本是独立获得的。

2. H_0: $\mu_1 = \mu_2$, H_A: $\mu_1 > \mu_2$

$$u = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{8.2 - 7.9}{\sqrt{\frac{0.6^2 \times 2}{20}}} = 1.58$$

3 .H_0的拒绝域

H_A: $\mu_1 > \mu_2$，做上侧检验，查表3得 $u_{0.05}$=1.645，u=1.58<1.645，接受H_0（P>0.05）

4. 结论:天山朱雀体长并不比阿尔泰山朱雀的长。

二　σ_i未知但相等时-成组数据的 t 检验

I. 方差齐性检验-F检验

II.　成组数据的t检验

I. 方差齐性检验-F检验

从两个正态总体中抽取的样本观察值的变异程度的检验, 建立在F分布基础上。

1. 假定从两个正态总体中独立抽取含量分别为n_1和n_2的两个随机样本，计算出s_1^2， s_2^2

2. $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$,

   $H_A:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，$H_A:\sigma_1^2>\sigma_2^2$, $H_A:\sigma_1^2<\sigma_2^2$

3. 显著水平：$\alpha=0.05$

4. 统计量：

   根据F的定义：

$$F_{df_1,df_2}=\frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}},\qquad 当\sigma_1^2=\sigma_2^2\ 时\ F=\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

5. H_0的拒绝域：

对于 $H_A:\sigma_1^2>\sigma_2^2$, $F> F_{\alpha}$

$H_A:\sigma_1^2<\sigma_2^2$ $F<F_{1-\alpha}$

$H_A:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$， $F>F_{\alpha/2}$ 和 $F<F_{1-\alpha}$

为了查表方便，F检验通常不做下侧检验．以较大的均方作分子，为较小的均方作分母，F值都大于1的。

因此，F分布仅列出F≥1的部分,所以在求F值时，均以大均方除以小均方，即，

$$F=\frac{S_{大}^2}{S_{小}^2}$$

例：测定西24号小麦的蛋白质含量10次，$s_1^2=1.621$，测定农大139小麦的蛋白质的含量5次， $s_1^2=0.135$，验证定西24号小麦的蛋白质含量的变异是否比农大139号为大？

解：1.小麦蛋白质含量是服从正态分布的随机变量，而且上述两样本是独立获得的。

2 . $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_A:\sigma_1^2>\sigma_2^2$

显著水平：$\alpha=0.05$

3.

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{1.621}{0.135}=12.01$$

4. H_0拒绝域：上侧检验，当$F>F_\alpha$时拒绝H_0，查表得，

$F_{9,4,0.05}=5.999$ $F>F_\alpha$ ∴拒绝H_0 ,接受H_A，即定西24号小麦蛋白质含量的变异大于农大139。

II. 成组数据的t检验——

在σ_i未知但具备齐性叫做成组数据 t 检验

1. $H_0: \mu_1=\mu_2$, $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$， $H_A: \mu_1 > \mu_2$， $H_A: \mu_1 < \mu_2$，
2. 显著水平： $\alpha=0.05$ ， $\alpha=0.01$
3. 统计量

$$t_{n_1+n_2-2}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-2)S_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$$

样本平均数差的标准误差

$$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-2)S_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

当$n_1 = n_2 = n$时 $$t_{(2n-2)} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{n}}}$$

当ni>50大样本时，n1-1= n1，n2-1= n2,

$$t_{n_1+n_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_2} + \frac{S_2^2}{n_1}}}$$

4. H_0的拒绝域: 对于 H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$，$|t| > t_{\alpha/2}$

H_A: $\mu_1 > \mu_2$， $t > t_{\alpha}$

H_A: $\mu_1 < \mu_2$， $t < -t_{\alpha}$

5. 结论，解释。

在应用成组数据t检验时，要求$\sigma_1=\sigma_2$ 具有齐性, 在 t 检验之前要作方差齐性检验。

例：研究喷施矮壮素使玉米矮化的效果，在抽穗期测定喷施矮壮素小区的玉米8株，对照区9株，结果见表，问矮壮素处理的效果是否显著？

矮壮素x_1（cm）	-170	x_1^2	对照x_2(cm)	-170	x_2^2
160	−10	100	170	0	0
160	−10	100	270	100	10000
200	30	900	180	10	100
160	−10	100	250	80	640
200	30	900	270	100	10000
170	0	0	290	120	14400
150	−20	400	270	100	10000
210	40	1600	230	60	3600
			170	0	0

解：先计算s_1^2，s_2^2 ，　　根据，$$S^2=\frac{\sum x^2-\frac{\left(\sum x\right)^2}{n}}{n-1}$$

得　$s_1^2=541.07$ ，$s_2^2=2300$

Ⅰ.方差齐性检验：

1. $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ ，$H_A:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

2. 显著水平：　$\alpha=0.05$

3. $F=s_2^2/s_1^2=2300/541.07=4.25$

4. 查表的$F_{8,7,0.025}=4.899$ ，$F<F_{0.025}$　接受H_0

5. 结论：处理与对照可能有公共的总体方差。

Ⅱ.做平均数差异显著性检验-t检验

1. H_0: $\mu_1 = \mu_2$, （喷施矮壮素的株高与未喷的相同）

2. H_A: $\mu_1 < \mu_2$, （喷施矮壮素的株高比未喷的矮）

3. 显著水平： $\alpha=0.05$

4. 统计量

$$t_{n_1+n_2-2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{176.3 - 233.3}{\sqrt{\frac{7\times 541.07 + 8\times 2300}{7+8}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)}} = \frac{-57}{18.6853} = -3.05$$

5. 查表得 $-t_{15,\,0.05} = -1.753$ $t = -3.05 < -t_{\alpha}$ 拒绝H_0，

即玉米喷施矮壮素后其株高显著地矮于对照。

三、σ_i未知且可能不等时-Aspin-Welch检验

方差不具备齐性时，

统计量

$$t_{df} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_2} + \frac{S_2^2}{n_1}}}$$

该检验的临界值仍由t表查出，但自由度和统计量t与t检验不同。

$$df = \frac{1}{\frac{k}{df_1} + \frac{(1-k)^2}{df_2}} \qquad k = \frac{\frac{S_1^2}{n_1}}{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \frac{S_{\bar{x}_1}^2}{S_{\bar{x}_1}^2 + S_{\bar{x}_2}^2}$$

其它步骤与t检验一致

5.3.2 配对设计两样本平均数的差异显著性检验

- 对配对实验设计做显著性检验的方法称为配对数据 t 检验。

配对实验设计：

- 高粱的若干父本与两个不同母本杂交，同一父本的两个杂交种是一个对子。
- 若干同窝的两只动物做不同处理，每一窝的两只动物是一个对子。
- 在做药效实验时，测定若干实验动物服药前后的有关数值，服药前后的一对数值是一个对子。

配对设计：

是指先根据配对的要求将试验单位两两配对，然后将配成对子的两个试验单位随机地分配到两个处理组中。每一个对子就是试验处理的一个重复。

配对设计目的：

减少系统误差，降低试验误差，提高试验的准确性与精确性。

配对的方式：

- 自身配对
- 同源配对

1、自身配对

指同一试验单位在二个不同时间上分别接受前后两次处理，用其前后两次的观测值进行自身对照比较；或同一试验单位的不同部位的观测值或不同方法的观测值进行自身对照比较。如观测某种病畜治疗前后临床检查结果的变化。

2、同源配对

指将来源相同、性质相同的两个个体配成一对，如将品种、窝别、性别、年龄、体重相同的两个试验动物配成一对，然后对配对的两个个体随机地实施不同处理。

配对设计试验资料的一般形式见下表

处 理	观 察 值				平均数	样本含量	总体平均数
1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1n}		n	
2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2n}		n	
差值 $d_i=x_{1i}-x_{2i}$	d_1	d_2		d_n	$\bar{d}=\frac{\sum d_i}{n}$	n	$\mu_{\bar{d}}$

配对t检验显著性检验的基本步骤如下：

（一）提出无效假设与备择假设

H_0: $\mu_{\bar{d}} = 0$ ， H_A: $\mu_{\bar{d}} \neq 0$

其中 $\mu_{\bar{d}}$ 为两样本配对数据差值 *d* 的总体平均数

（二）计算 *t* 值　计算公式为

$$t = \frac{\bar{d}}{S_{\bar{d}}}, df = n - 1$$

$S_{\bar{d}}$ 称为差数平均数的标准差，即 $S_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}}$

$$S_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum\left(d-\bar{d}\right)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum d^2 - (\sum d)^2 / \mathrm{n}}{n(n-1)}}$$

（三）查临界*t*值，作出统计推断

相应于各备择假设之H_0的拒绝域：

① $t > t_{\alpha}$ ② $t < -t_{\alpha}$ ③ $|t| > t_{\alpha/2}$

【例】 用家兔10只试验某批注射液对体温的影响，测定每只家兔注射前后的体温。设体温服从正态分布，问注射前后体温有无显著差异？

10只家兔注射前后的体温

兔号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
注射前体温	37.8	38.2	38.0	37.6	37.9	38.1	38.2	37.5	38.5	37.9
注射后体温	37.9	39.0	38.9	38.4	37.9	39.0	39.5	38.6	38.8	39.0
$d = x_1 - x_2$	-0.1	-0.8	-0.9	-0.8	0	-0.9	-1.3	-1.1	-0.3	-1.1

1、提出无效假设与备择假设

H_0: $\mu_{\bar{d}} = 0$ ，即假定注射前后体温无差异

H_A: $\mu_{\bar{d}} \neq 0$ ，即假定注射前后体温有差异

2、计算*t* 值

经过计算得 $\bar{d} = -0.73$,

$$S_{\bar{d}} = S_d / \sqrt{n} = 0.445 / \sqrt{10} = 0.141$$

故 $t = \dfrac{\bar{d}}{S_{\bar{d}}} = \dfrac{-0.73}{0.141} = -5.177$ 且 $df = n - 1$ =10-1=9

3、查临界*t* 值,作出统计推断

由*df*=9, 查表得:$t_{0.01/2\ (9)}$ =3.250， 因为$|t|>t_{0.01/2\ (9)}$, $P<0.01$, 否定 H_0: $\mu_{\bar{d}} = 0$ ，接受 H_A: $\mu_{\bar{d}} \neq 0$，表明家兔注射该批注射液前后体温差异极显著，这里表现为注射该批注射液可使体温极显著升高。

【例】从 8 窝动物中每窝选出性别相同、体重接近的两只进行饲料对比试验。将每窝两只随机分配到两个饲料组中，时间30天，试验结果见表。问两种饲料喂饲动物增重有无显著差异？

动物饲料对比试验　　单位：*kg*

窝号	1	2	3	4	5	6	7	8
甲饲料（x_1）	10.0	11.2	11.0	12.1	10.5	9.8	11.5	10.8
乙饲料（x_2）	9.8	10.6	9.0	10.5	9.6	9.0	10.8	9.8
$d = x_1 - x_2$	0.2	0.6	2.0	1.6	0.9	0.8	0.7	1.0

1、提出无效假设与备择假设

H_0: $\mu_{\bar{d}} = 0$ ，即假定两种饲料喂饲动物平均增重无差异

H_A: $\mu_{\bar{d}} \neq 0$ ，即假定两种饲料喂饲动物平均增重有差异

2、计算t值

计算得 $\bar{d} = 0.975,$

故 $S_{\bar{d}} = S_d / \sqrt{n} = 0.5726 / \sqrt{8} = 0.2025$

且 $t = \dfrac{\bar{d}}{S_{\bar{d}}} = \dfrac{0.975}{0.2025} = 4.815$ $df = n - 1 = 8 - 1 = 7$

3、查临界t值，作出统计推断 由df=7，查 t 值 表 得：

$t_{0.01（7）}$ = 3.499， 因 为 |t| >3.499，P<0.01，表明甲种饲料与乙种饲料喂饲动物平均增重差异极显著，这里表现为甲种饲料喂饲的平均增重极显著高于乙种饲料喂饲的平均增重。

两个样本的差异显著性检验小结

1. 两个平均数的差异显著性检验

标准差 σ_i 已知，两个平均数间差异显著性检验

标准差 σ_i 未知但相等，两个平均数间差异显著性检验

标准差 σ_i 未知且不等，两个平均数间差异显著性检验

成对数据的差异显著性检验

2. 两个方差的齐性检验

5.4 百分数资料差异显著性检验

- 适用范围：

  服从二项分布的百分数资料，n充分大。

  两个属性的质量性状的百分数资料，如成活率、死亡率、孵化率、感染率、阳性率等服从二项分布。

- 百分数的假设检验应按二项分布进行:

  当 n 较大，p 不过小，且np和nq均大于5时 ，二项分布接近于正态分布。

若np或nq小于或等于30时，应对u进行连续性矫正.

当 n 足够大时，近似用 u 检验法 进行差异显著性检验

适用于近似采用u检验所需要的二项分布百分数资料的样本含量n

p（样本百分数）	np（较小百分数的次数）	n（样本含量）
0.5	15	30
0.4	20	50
0.3	24	80
0.2	40	200
0.1	60	600
0.05	70	1,400

5.4.1 样本百分数与总体百分数差异显著性检验

5.4.2 两个样本百分数差异显著性检验

5.5.1 样本百分数与总体百分数差异显著性检验

- 目的:

检验服从二项分布的样本百分数 $\hat{p}$ 与已知二项总体百分数 p_0 差异是否显著.

设：$\hat{p}$ 为样本百分数，n 为独立试验次数，

p 为 $\hat{p}$ 所在总体百分数，p_0 为已知总体百分数。

1 提出无效假设与备择假设

H_0: $P=P_0$ ， H_A: $P\neq P_0$

2 计算u值或u_c值

u值的计算公式为：

$$u=\frac{\hat{p}-p_0}{\sigma_{\hat{p}}} \qquad u_c=\frac{|\hat{p}-p_0|-\frac{0.5}{n}}{\sigma_{\hat{p}}}$$

$\sigma_{\hat{p}}$ 为样本百分数标准误，计算公式为：$\sigma_{\hat{p}}=\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

3.查临界u 值,作出统计推断

相应于各备择假设之H_0的拒绝域:

① u(或u_c)>u_α ② u(或u_c)<-u_α ③ $|u|$(或$|u_c|$) $\geq u_{\alpha/2}$

【例】据往年调查某地区的乳牛隐性乳房炎一般为30%，现对某牛场 500 头乳牛进行检测，结果有175头乳牛凝集反应阳性，问该牛场的隐性乳房炎是否与往年相同？

此例总体百分数p_0=30%，样本百分数 $\hat{p} = 175/500 = 0.35$

因为 $n\varphi_0 = 500 \times 30\% = 150 > 30$ 不须连续性矫正。

1、提出无效假设与备择假设

$$H_0 : \varphi = 30\% \qquad H_A : \varphi \neq 30\%$$

2、计算 u 值

因为

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.3\times(1-0.3)}{500}} = 0.0205$$

于是

$$u = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{0.35 - 0.30}{0.0205} = 2.439$$

3、作出统计推断

因为$1.96 < u < 2.58$，$0.01 < p < 0.05$，表明样本百分数 $\hat{p}$ =35% 与总体百分数 p_O=30% 差异显著，这里表现为该奶牛场的隐性乳房炎显著高于往年。

5.5.2 两个样本百分数差异显著性检验

- 目的：

  在于检验两个样本百分数 $\hat{p}_1$、$\hat{p}_2$ 所在的两个二项总体百分数 P_1、P_2 是否相同。

- 当两样本的 np、nq 均大于30时，可以近似地采用 u 检验法进检验.
- 但在 np 和（或）nq 小于或等于30时，需作连续性矫正。

检验的基本步骤是：

1. 提出无效假设与备择假设

$H_0: \varphi_1 = \varphi_2$ $\quad H_A: \varphi_1 > \varphi_2$，或$H_A: \varphi_1 < \varphi_2$，$H_A: \varphi_1 \neq \varphi_2$

2. 计算u值或u_c值

$$u = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{\varphi(1-\varphi)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}$$

$$u_c = \frac{x_1 - x_2 - 0.5 - \overline{p}(n_1 - n_2)}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})(n_1 + n_2)}}$$

其中 $\hat{p}_1 = x_1/n_1$，$\hat{p}_2 = x_2/n_2$ 为两个样本百分数，

$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$ 为样本百分数差异标准误，

当φ未知时

用$S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$估计$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$，$S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$

$\bar{p}$ 为合并样本百分数：

$$\bar{p}=\frac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}=\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$$

$$u=\frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(\varphi_1-\varphi_2)}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$$

3. 查临界u 值, 作出统计推断

相应于各备择假设之H_0的拒绝域:

① u(或u_c)>u_α ② u(或u_c)<-u_α ③ $|u|$(或$|u_c|$)$\geq u_{\alpha/2}$

【例】 研究地势对小麦锈病发病的影响，调查低洼地麦田378株，其中锈病株342株，调查高坡地麦田396株，其中锈病株313株，试比较两块麦田锈病发病率是否有显著性差异？

$$H_0: \varphi_1 = \varphi_2 \quad H_A: \varphi_1 \neq \varphi_2$$

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{342}{378} = 0\cdot905 \qquad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{313}{396} = 0.790$$

$$\overline{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{342+313}{378+396} = 0.846 \qquad \overline{q} = 1 - \overline{p} = 1 - 0\cdot846 = 0\cdot154$$

$$S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\overline{p}\overline{q}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})} = \sqrt{0.846\times0.154\times(\frac{1}{378}+\frac{1}{396})} = 0.026$$

$$u = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} = \frac{0.905-0.790}{0.026} = 4.423$$

推断：由于|u|>2.58，P<0.01， 故否定 $H_0: \varphi_1 = \varphi_2$，接受 $H_A: \varphi_1 \neq \varphi_2$

认为两块麦田锈病发生率有极显著差异。

5.5.3 显著性检验中应注意的问题

1.关于H_0的设定：

H_0往往是不期望的，H_A是期望的。

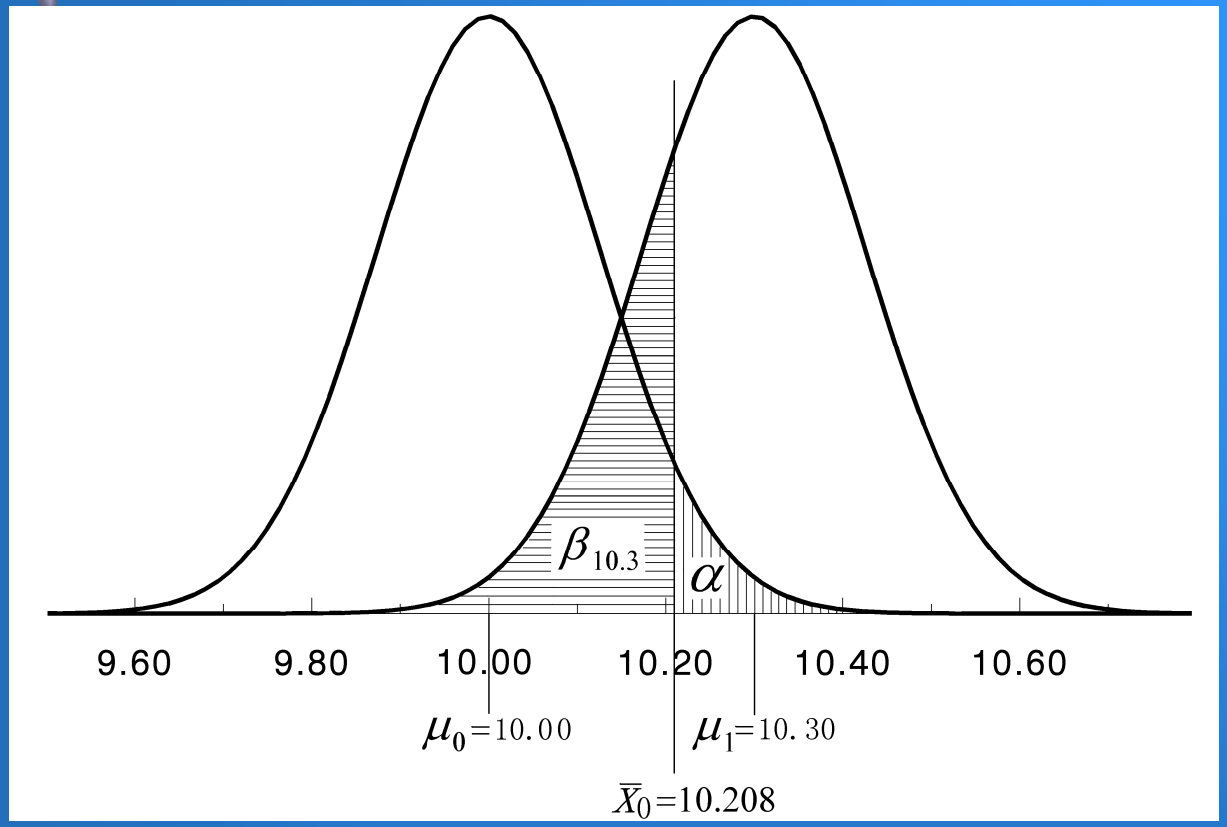
2. 关于两类型错误：

假设检验可能存在两类错误：

I型错误：如果H_0是正确的，但却被否定了(弃真)。

II 型错误：如果H_0不成立，却接受了它 (纳伪)。

I型错误发生的概率为α，II 型错误发生的概率为β



从上图中可以看出

（1）降低犯I型错误的概率，必然增加犯II型错误的概率。

（2）为了同时降低犯两种错误的概率，必须增加样本含量。

3. α 值的确定

由于 β 值的大小与 α 值的大小有关，所以在选用检验的显著水平时应考虑到犯Ⅰ、Ⅱ型错误所产生后果严重性的大小，还应考虑到试验的难易及试验结果的重要程度：

- 若一个试验耗费大，可靠性要求高，不允许反复，那么 α 值应取小些；
- 当一个试验结论的使用事关重大， 容易产生严重后果，如药物的毒性试验， α 值亦应取小些；
- 对于一些试验条件不易控制， 试验误差较大的试验，可将 α 值放宽到 0.1， 甚至放宽到0.25。

4. 对“差异显著”的正确理解

①当 $P < \alpha$ 时，所得结论正确表述为：由样本平均数推断出的总体平均数 μ 与 μ_0 之间的差异有统计学意义。即它们属于两个不同总体。习惯上称为“差异显著”。

②显著性检验只是用来确定无效假设能否被推翻，而不能证明无效假设是正确的。

③ “显著” 或“极显著”是指表面上如此差别的不同样本来自同一总体的可能性小于0.05或0.01，已达到了可以认为它们有实质性差异的显著水平。

④“差异不显著”是指表面上的这种差异在同一总体中出现的可能性大于统计上公认的概率水平0.05，不能理解为试验结果间没有差异。

⑤显著水平的高低表示下结论的可靠程度的高低，即在 0.01 水平下否定无效假设的可靠程度为99％，而在 0.05水平下否定无效假设的可靠程度为95%。

⑥有些试验结果虽然差别大，但由于误差大，也许不能得出“差异显著”的结论，而有些试验结果的差异虽小，但由于误差小，反而可能推断为“差异显著”。

⑦ 接受H_0的更严密说法是：尚无足够理由拒绝H_0。

显著性检验中应注意的问题

- 试验之前进行正确的试验设计。
- 根据不同试验设计方法，选用不同的显著性检验方法。
- 正确理解统计结论“差异不显著、差异显著、差异极显著”的统计意义。
- 合理建立统计假设，正确计算检验用的统计量。
- 统计结论不能绝对化，统计分析应与专业分析相结合。
- 报告结论时应列出检验用的统计量的值、p值范围（$p<0.05$等）、注明是双侧检验还是单侧检验。

复 习

- 单个样本的假设检验

1. 单个平均数的假设检验

标准差σ已知，单个平均数与总体平均数的假设检验

标准差σ未知，单个平均数与总体平均数的假设检验

2. 单个样本方差与总体方差的假设检验

3. 百分数资料差异显著性检验

样本百分数与总体百分数差异显著性检验

两个样本的差异显著性检验

1. 两个平均数的差异显著性检验

标准差 σ_i 已知，两个平均数间差异显著性检验

标准差 σ_i 未知但相等，两个平均数间差异显著性检验

标准差 σ_i 未知且不等，两个平均数间差异显著性检验

成对数据的差异显著性检验

2. 两个方差的齐性检验

3. 百分数资料差异显著性检验

两个样本百分数差异显著性检验

课前提问

1. 显著性检验的基本步骤

2. H_0的含义

3. 显著水平

4. 上侧检验、下侧检验、双侧检验

课前提问

1. 单个平均数的假设检验

标准差σ已知，单个平均数与总体平均数的假设检验

标准差σ未知，单个平均数与总体平均数的假设检验

2. 单个样本方差与总体方差的假设检验

课前提问

1. 从一个总体中抽样，样本统计数的分布

2. 从两个总体中抽样，样本统计数的分布

3. 统计推断的内容

4. 什么是显著性检验?

5. 显著性检验的目的与对象

6. 为什么进行显著性检验